



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÉHO INŽINIERSTVA

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATICKÉ MODELY V BIOLÓGII

MATHEMATICAL MODELS IN BIOLOGY

BAKALÁRSKA PRÁCA

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

KATARÍNA VIDOVÁ

VEDÚCI PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Mgr. ZDENĚK OPLUŠTIL, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Katarína Vidová**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Matematické modely v biologii

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Matematické modelování je důležitou součástí mnoha oborů přírodních věd. Obvyklým problémem je aplikování teoretických výsledků (modelů) do reálných situací. My se zaměříme na spojitě biomedicínské modely, které lze popsat pomocí diferenciálních rovnic resp. jejich systémů.

Cíle bakalářské práce:

Nastudování teoretických základů nutných pro matematické modelování, zejména z oblasti diferenciálních rovnic a jejich systémů. Sestavení některých modelů z matematické biologie. Charakterizace a popis těchto modelů pomocí kvalitativních vlastností příslušných diferenciálních rovnic a jejich systémů. Aplikace některých modelů v reálných situacích.

Seznam doporučené literatury:

- MURRAY, J. D. Mathematical biology. Springer, 3rd ed. Springer-Verlag. 2002.
- KALAS, J. a M. RÁB. Obyčejné diferenciální rovnice. Brno: Masarykova univerzita. 1995.
- KALAS, J. a Z. POSPÍŠIL. Spojité modely v biologii. Brno: Masarykova univerzita. 2001.
- JONES, D. S. a B. D. SLEEMAN. Differential equations and mathematical biology. Chapman and Hall/CRC. 2003.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

V tejto práci sa zameriame na zostavenie modelov z matematickej biológie popisujúcich interakciu dravec - korisť. Porovnáme najzákladnejší model Lotka - Volterra s realistickejšími modelmi, tzn. s modelom s vnútrodruhovou konkurenciou a s modelom Gauseho typu. Na záver tieto modely aplikujeme v konkrétnych situáciách a s pomocou softwaru Matlab vykreslíme trajektórie riešení.

Summary

The focus of this thesis is on a model construction from the field of mathematical biology describing interaction predator-prey. The most elementary Lotka–Volterra model is compared with more realistic models, i.e. intraspecific competition model and Gause model. Finally, the models are applied in specific situations and solution trajectories are drawn using Matlab.

Klíčové slová

Matematický model, model dravec - korisť, model Lotka - Volterra, model Gauseho typu

Keywords

Mathematical model, predator - prey model, Lotka - Volterra model, Gause model

VIDOVÁ, K. *Matematické modely v biológii*. Brno: Vysoké učenie technické v Brne, Fakulta strojného inžinierstva, 2018. 45 s. Vedúci doc. Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.

Prehlasujem, že som bakalársku prácu *Matematické modely v biológii* vypracovala samostatne pod vedením doc. Mgr. Zdeňka Opluštila, Ph.D. s použitím materiálov uvedených v zozname literatúry.

Katarína Vidová

Na tomto mieste by som rada poďakovala doc. Mgr. Zdeňkovi Opluštilovi, Ph.D. za odborné vedenie, ochotu a trpezlivosť pri písaní tejto práce.

Obsah

Úvod	3
1 Základné pojmy	5
1.1 Systémy nelineárnych diferenciálnych rovníc	5
1.1.1 Existencia a jednoznačnosť riešenia	5
1.2 Autonómne systémy	6
1.2.1 Geometrická interpretácia	6
1.2.2 Typy singulárnych bodov v rovine	7
1.2.3 Lineárne autonómne systémy v rovine	7
1.2.4 Singulárne body nelineárnych autonómnych rovníc	8
2 Model Lotka - Volterra	11
2.1 Predpoklady a popis modelu	11
2.2 Singulárne body, smerové pole, riešenie sústavy	11
2.2.1 Singulárne body, smerové pole	11
2.2.2 Riešenie sústavy	12
3 Model s vnútrodruhovou konkurenciou	15
3.1 Predpoklady a popis modelu	15
3.2 Singulárne body, smerové pole, trajektórie	15
4 Modely dravec - korisť Gauseho typu	19
4.1 Predpoklady a zostavenie modelu	19
4.2 Trofická funkcia a jej typy	20
4.3 Model dravec - korisť s limitným cyklom (model s trofickou funkciou typu II)	21
4.3.1 Popis modelu	21
4.3.2 Singulárne body, smerové pole, trajektórie	22
4.4 Model s trofickou funkciou typu III	25
4.4.1 Singulárne body, trajektórie systému	26
5 Aplikácia modelov dravec - korisť	29
5.1 Model Lotka - Volterra	29
5.2 Model s vnútrodruhovou konkurenciou	30
5.2.1 Prípád $\gamma_2\varepsilon_1 < \alpha\varepsilon_2$	30
5.2.2 Prípád $\gamma_2\varepsilon_1 > \alpha\varepsilon_2$	32
5.3 Model typu Gause	36
5.3.1 S trofickou funkciou typu II.	36
5.3.2 S trofickou funkciou typu III.	38
Záver	43
Literatúra	45

Úvod

Matematické modelovanie má v súčasnej dobe veľké uplatnenie nielen v prírodných vedách, ale tiež v oblasti techniky, ekonómie či v sociálnych vedách. Umožňuje nám lepšie pochopiť a predvídať chovanie rôznych procesov, javov a systémov vyskytujúcich sa všade okolo nás. Nahradza experimenty, ktoré z nejakého dôvodu nie je možné uskutočniť v reálnom svete a častokrát šetrí financie na výskum.

V tejto práci sa zameriame na matematické modelovanie v oblasti biológie. Avšak predtým, ako so samotným modelovaním začneme, bude potrebné definovať niektoré základné pojmy. Prvú kapitolu preto venujeme najmä sústavám nelineárnych diferenciálnych rovníc a autonómnym systémom.

V druhej kapitole si povieme, v akej spojitosti vznikol prvý známy model popisujúci vzťah dravec - korisť a následne si ho zostavíme a analyzujeme. Poukážeme tiež na veľké nedostatky tohto modelu.

V ďalších dvoch kapitolách sa budeme snažiť nedostatky prvého modelu odstrániť, aby sme sa o niečo viac priblížili k reálnym situáciám vyskytujúcim sa v prírode. Zostavíme si tak dva ďalšie typy modelov popisujúcich interakciu dravec - korisť, a to model s vnútrodruhovou konkurenciou a model Gauseho typu.

Na záver tejto práce si ukážeme chovanie jednotlivých modelov v konkrétnych situáciach a pomocou softwaru Matlab si trajektórie riešení tiež vykreslíme.

Kapitola 1

Základné pojmy

Na úvod si definujeme niekoľko základných pojmov, ktoré sú nevyhnutné pre matematické modelovanie. Tieto poznatky budeme čerpať z [4], [5], [6].

1.1 Systémy nelineárnych diferenciálnych rovníc

V tejto kapitole sa budeme zaoberať systémom diferenciálnych rovníc

$$x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n),$$

$$x'_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_n),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n),$$

kde $' = d/dt$ a f_1, f_2, \dots, f_n sú funkcie definované na nejakej množine $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Tento systém budeme zapisovať vo vektorovom tvare

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (1.1)$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n))$, a jeho *riešením* budeme rozumieť n -vektorovú funkciu \mathbf{x} diferencovateľnú na nejakom intervale I a takú, že pre $t \in I$ je $[t, x_1(t), \dots, x_n(t)] \in G$ a $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$.

Úplným riešením systému (1.1) budeme rozumieť riešenie \mathbf{x} , ktoré nie je zúžením žiadneho iného riešenia.

Buď $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $[t_0, \mathbf{x}_0] \in G$. Problém určiť riešenie rovnice (1.1), ktoré spĺňa *počiatočnú podmienku*

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.2)$$

sa nazýva *počiatočný (Cauchyho) problém* alebo *úloha*. Hovoríme, že počiatočný problém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.3)$$

je *jednoznačný*, ak ku každým dvom riešeniam $\mathbf{x}(t), t \in J_1, \mathbf{y}(t), t \in J_2$ problému (1.3) existuje $\delta > 0$ také, že $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$ pre každé $t \in J_1 \cap J_2 \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

1.1.1 Existencia a jednoznačnosť riešenia

Veta 1 (Picardova - Lindelöfova) *Buďte $a, b \in \mathbb{R}^+, t_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a označme $J = \langle t_0, t_0 + a \rangle, D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq b\}$. Predpokladajme, že funkcia $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá a spĺňa Lipschitzovú podmienku (vzhľadom k \mathbf{x}): existuje $L > 0$ tak, že platí*

$$|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad [t, \mathbf{x}], [t, \mathbf{y}] \in J \times D. \quad (1.4)$$

Potom existuje práve jedno riešenie počiatočného problému (1.3) definované na intervale $\langle t_0, t_0 + \delta \rangle =: J^+$, kde

$$\delta = \min(a, bm^{-1}),$$

pričom

$$m = \max_{[t, \mathbf{x}] \in J \times D} |f(t, \mathbf{x})|.$$

Veta 2 (Peanova) Budte $a, b \in \mathbb{R}^+$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a označme $I = \langle t_0, t_0 + a \rangle$, $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq b\}$. Nech funkcia $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá. Potom existuje aspoň jedno riešenie počiatočného problému (1.3), ktoré je definované na intervale $J := \langle t_0, t_0 + \alpha \rangle$, kde $\alpha := \min(a, bm^{-1})$, $m = \max_{[t, \mathbf{x}] \in I \times D} |f(t, \mathbf{x})|$.

1.2 Autonómne systémy

1.2.1 Geometrická interpretácia

Vektorová diferenciálna rovnica

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.5)$$

kde vektorová funkcia \mathbf{f} je definovaná na nejakej oblasti Ω v priestore \mathbb{R}^n , sa nazýva *autonómny systém*. Často býva $\Omega = \mathbb{R}^n$. V tejto kapitole budeme predpokladať, že \mathbf{f} je spojitá n -vektorová funkcia a že počiatočný problém (1.5), $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ je jednoznačný pre ľubovoľné $[t_0, \mathbf{x}_0] \in \mathbb{R} \times \Omega$. Riešením budeme rozumieť úplné riešenie. Oblasť Ω sa nazýva *fázový priestor*, premenná t sa nazýva *čas*.

Riešenie $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ rovnice (1.5) môžeme interpretovať buď ako graf funkcie $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ v priestore $\mathbb{R} \times \Omega$, alebo ako krivku v priestore Ω danú parametricky rovnicou $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$. V druhom prípade sa taká krivka nazýva *trajektória* systému (1.5). Je to kolmý priemet grafu funkcie $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ z $\mathbb{R} \times \Omega$ do Ω .

Veta 3 Bud $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ riešenie systému (1.5) spĺňajúce počiatočnú podmienku $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Potom pre každé $c \in \mathbb{R}$ je tiež $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(t) := \boldsymbol{\varphi}(t + c)$ riešením (1.5) a spĺňa podmienku $\boldsymbol{\psi}(t_0 - c) = \mathbf{x}_0$. Ak je $\boldsymbol{\varphi}(t)$ definované na intervale (t_1, t_2) , je $\boldsymbol{\psi}(t)$ definované na intervale $(t_1 - c, t_2 - c)$.

Dôkaz. Nájdeme napríklad v [4].

Veta 4 Budte $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ riešením systému (1.5). Potom ich trajektórie buď splývajú, alebo nemajú ani jeden bod spoločný.

Dôkaz. Nájdeme napríklad v [4].

Definícia 1 Bod \mathbf{x}_0 sa nazýva *singulárny bod* (kritický bod, stacionárny bod, rovnovážny bod, degenerovaná trajektória) systému (1.5), ak $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Trajektória systému (1.5) sa nazýva *cyklus*, ak je uzavretou krivkou.

Veta 5 Autonomný systém (1.5) môže mať trajektórie typu:

1. *Singulárne body.* Odpovedajú konštantným riešeniam.
2. *Uzavreté trajektórie (cykly).* Odpovedajú nekonštantným periodickým riešeniam.
3. *Trajektórie, ktoré samy seba nepretínajú.*

Dôkaz. Nájdeme napríklad v [4].

1.2.2 Typy singulárnych bodov v rovine

Nech je autonómny systém dvoch rovníc daný vo vektorovom tvare

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1.6)$$

a predpokladajme existenciu a jednoznačnosť riešenia každého počiatočného problému. Singulárny bod \mathbf{x}_0 systému (1.6) sa nazýva:

- *stred*, ak existuje rýdže okolie U bodu \mathbf{x}_0 také, že každým bodom $\mathbf{a} \in U$ prechádza jediná trajektória, ktorá je uzavretá a obsahuje vo svojom vnútri bod \mathbf{x}_0 ;
- *ohnisko*, ak existuje rýdže okolie U bodu \mathbf{x}_0 také, že bod $\mathbf{x}(t)$ trajektórie \mathbf{x} vychádzajúci z ľubovoľného bodu $\mathbf{a} \in U$ má tú vlastnosť, že konverguje pre $t \rightarrow \infty$ alebo $t \rightarrow -\infty$ k \mathbf{x}_0 a to tak, že veľkosť orientovaného uhlu vektoru $\overrightarrow{\mathbf{x}_0\mathbf{x}(t)}$ od nejakého pevného vektoru $\overrightarrow{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1}$ má nevlastnú limitu;
- *uzol*, ak existuje rýdže okolie U bodu \mathbf{x}_0 také, že pre bod $\mathbf{x}(t)$ trajektórie \mathbf{x} vychádzajúci z ľubovoľného bodu $\mathbf{a} \in U$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \quad \text{alebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0,$$

pričom veľkosť orientovaného uhlu $\overrightarrow{\mathbf{x}_0\mathbf{x}(t)}$ od nejakého pevného vektoru $\overrightarrow{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1}$ má konečnú limitu;

- *sedlo*, ak existuje len konečný počet trajektórií $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ takých, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \quad \text{alebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0.$$

1.2.3 Lineárne autonómne systémy v rovine

Je daný autonómny systém

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad (1.7)$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

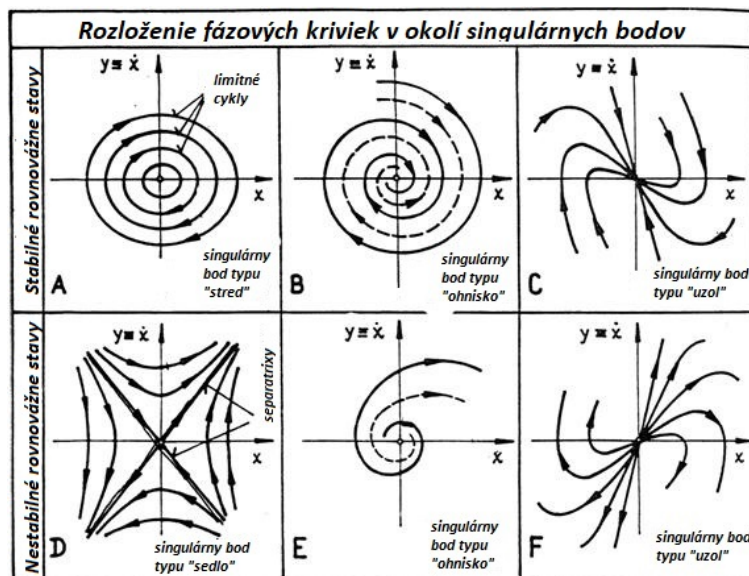
Ak je \mathbf{x} riešením systému (1.7), je tiež $\tau\mathbf{x}$, $\tau \in \mathbb{R}$, riešením tohto systému. Počiatok je jediným singulárnym bodom systému (1.7) práve vtedy, keď $\det A \neq 0$, t.j. práve vtedy, keď 0 nie je koreňom charakteristickej rovnice matice A

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Veta 6 Uvažujme sústavu lineárnych rovníc (1.7) a jej charakteristickú rovnicu s koreňmi λ_1, λ_2 .

- Ak sú oba korene reálne a kladné, tj. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$, singulárny bod je odpudzujúci uzol.
- Ak sú oba korene reálne a záporné, tj. $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$, singulárny bod je príťažlivý uzol.
- Ak sú oba korene reálne, jeden kladný a druhý záporný, tj. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, singulárny bod je sedlo.
- Ak sú korene komplexne združené s kladnou reálnou časťou, tj. $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$, ($\mu > 0, \nu \neq 0$), singulárny bod je odpudzujúce ohnisko.
- Ak sú korene komplexne združené so zápornou reálnou časťou, tj. $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$, ($\mu < 0, \nu \neq 0$), singulárny bod je príťahujúce ohnisko.
- Ak sú korene komplexne združené s nulovou reálnou časťou, tj. $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$, singulárny bod je stred.

Jednotlivé typy singulárnych bodov môžeme vidieť na obrázku 1.1



Obr. 1.1: Typy singulárnych bodov

1.2.4 Singulárne body nelineárnych autonómnych rovníc

Uvažujme systém

$$x' = ax + by + P(x, y), \quad (1.8)$$

$$y' = cx + dy + Q(x, y).$$

Definícia 2 Singulárny bod \mathbf{x}_0 sa nazýva bod rotácie, ak v ľubovoľnom okolí bodu \mathbf{x}_0 existuje aspoň jeden cyklus, obsahujúci vo svojom vnútri bod \mathbf{x}_0 .

Zavedme ďalej označenie

$$f_1 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},$$

$$g_1 = \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad g_2 = \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Veta 7 *Predpokladajme, že funkcie $f(x, y), g(x, y)$ sú spojité a majú spojité parciálne derivácie druhého rádu v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a že $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Nech*

$$\det \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Potom je bod $[x_0, y_0]$ izolovaným singulárnym bodom systému

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Pritom je bod $[x_0, y_0]$ uzol, ohnisko alebo sedlo pre systém (1.9), ak je počiatok singulárnym bodom rovnakého typu pre lineárny systém

$$\begin{aligned} x' &= f_1 x + f_2 y, \\ y' &= g_1 x + g_2 y. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ak je však počiatok stred pre systém (1.10), je bod $[x_0, y_0]$ buď bod rotácie, alebo ohnisko pre systém (1.9).

Kapitola 2

Model Lotka - Volterra

V 20. rokoch 20. storočia požiadali V. Volteru o zostavenie modelu, ktorý by popisoval kolísanie populácie rýb v Jadranskom mori. Dôvodom bolo veľké znepokojenie rybárov počas nízkej populácie rýb. Volterra teda zostavil model známy ako model Lotka - Volterra (pretože A.J. Lotka zostavil podobný model v inom kontexte približne v ten istý čas) založený na predpokladoch, že ryby a žraloky sú vo vzťahu dravec - korisť (viď napr. [1]).

2.1 Predpoklady a popis modelu

Nech N_1 značí veľkosť populácie koristi a N_2 veľkosť populácie dravca. Ďalej uvažujme nasledujúce predpoklady:

1. Korisť má neobmedzené množstvo potravy. To znamená, že populácia koristi bez prítomnosti dravca rastie neobmedzene podľa Malthusovho modelu, tj. $dN_1/dt = \varepsilon_1 N_1$, kde $\varepsilon_1 > 0$ značí strednú rýchlosť rastu veľkosti populácie koristi.
2. Korisť je jediným alebo aspoň dominantným zdrojom potravy dravca. Dravce teda bez prítomnosti koristi vymierajú, tj. $dN_2/dt = -\varepsilon_2 N_2$, kde $-\varepsilon_2 < 0$ značí strednú rýchlosť rastu veľkosti populácie dravcov.
3. Prítomnosť predátora spôsobí pokles populácie koristi, tj. $dN_1/dt = -\gamma_1 N_2 N_1$, kde $-\gamma_1 < 0$ je koeficient predácie.
4. Prítomnosť koristi spôsobí nárast populácie dravca, tj. $dN_2/dt = \gamma_2 N_1 N_2$, kde $\gamma_2 > 0$ je miera pôrodnosti dravca na jednu korisť.

Na základe týchto predpokladov môžeme zostaviť nasledovnú sústavu diferenciálnych rovníc

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1, \quad N_2' = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2. \quad (2.1)$$

Dostávame tak najzákladnejší model popisujúci vzťah dravec - korisť, model Lotka - Volterra, ktorý môžeme nájsť napríklad v [2], [3].

2.2 Singulárne body, smerové pole, riešenie sústavy

2.2.1 Singulárne body, smerové pole

Uvažujme teda sústavu rovníc (2.1). Každý počiatočný problém pre tento systém má jediné úplné riešenie. Budú nás zaujímať riešenia, ktorých trajektórie ležia v \mathbb{R}_+^2 .

Pravú stranu rovníc položíme rovno nule a získame tak dva singulárne body : $[0,0]$ a $[\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}]$. Ďalej zostavíme Jacobiho maticu, pomocou ktorej vyšetříme chovanie

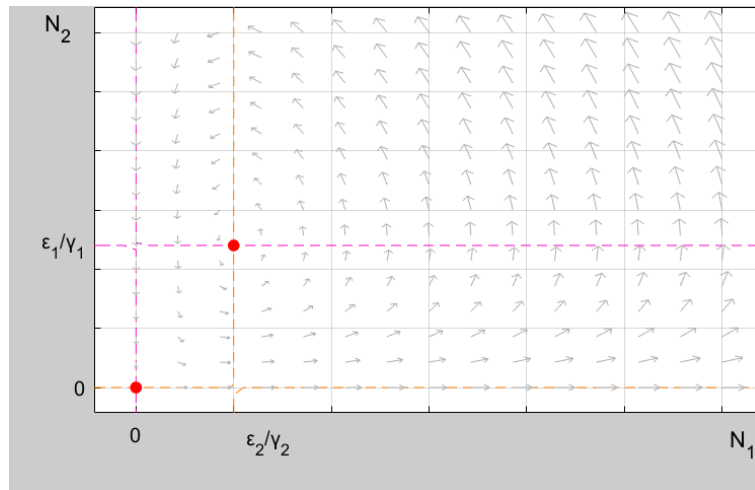
trajektórií v okolí singulárnych bodov. Jacobiho matica má tvar

$$J(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 & -\gamma_1 N_1 \\ \gamma_2 N_2 & -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1 \end{bmatrix}.$$

Po dosadení singulárnych bodov do Jacobiho matice obržíme nasledovné

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad J\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\gamma_1 \varepsilon_2}{\gamma_2} \\ \frac{\gamma_2 \varepsilon_1}{\gamma_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Vlastné čísla matice $J(0,0)$ sú $\lambda_1 = \varepsilon_1 > 0$, $\lambda_2 = -\varepsilon_2 < 0$. Obe vlastné čísla sú reálne a majú navzájom opačné znamienka, a teda podľa Vety 6 a 7 je singulárny bod $[0,0]$ sedlo. Vlastné čísla matice $J(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1})$ sú $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$. Dalo by sa dokázať, že singulárny bod $[\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}]$ je stred (dôkaz môžeme nájsť napr. v [3]). Smerové pole sústavy (2.1) je zobrazené na obrázku 2.1



Obr. 2.1: Smerové pole sústavy (2.1)

2.2.2 Riešenie sústavy

Sústavu diferenciálnych rovníc (2.1) prevedieme do tvaru

$$\frac{dN_1/dt}{dN_2/dt} = \frac{dN_1}{dN_2} = \frac{(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)N_1}{(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)N_2}$$

a ďalej pokračujeme separáciou premenných

$$\frac{(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)}{N_1} dN_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)}{N_2} dN_2.$$

Následnou integráciou potom dostávame

$$\int \frac{(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)}{N_1} dN_1 = \int \frac{(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)}{N_2} dN_2$$

$$\int \frac{-\varepsilon_2}{N_1} dN_1 + \int \frac{\gamma_2 N_1}{N_1} dN_1 = \int \frac{\varepsilon_1}{N_2} dN_2 - \int \frac{\gamma_1 N_2}{N_2} dN_2$$

$$-\varepsilon_2 \ln N_1 + \gamma_2 N_1 = \varepsilon_1 \ln N_2 - \gamma_1 N_2 + C$$

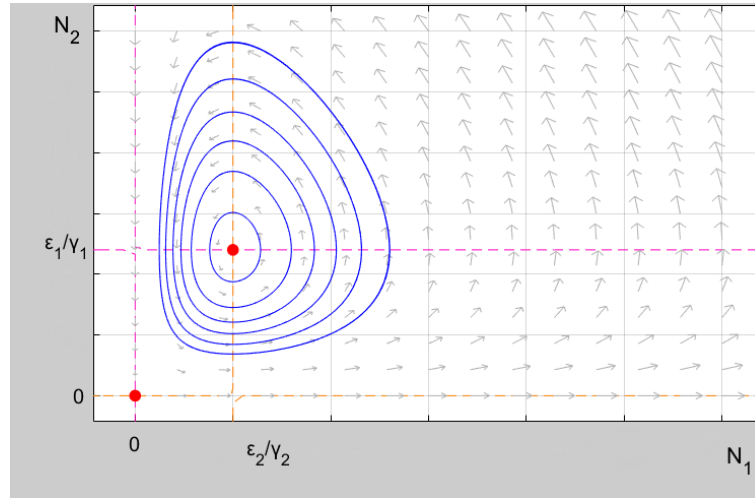
$$-\varepsilon_2 \ln N_1 - \varepsilon_1 \ln N_2 + \gamma_2 N_1 + \gamma_1 N_2 = C$$

kde C značí konštantu.

Položme

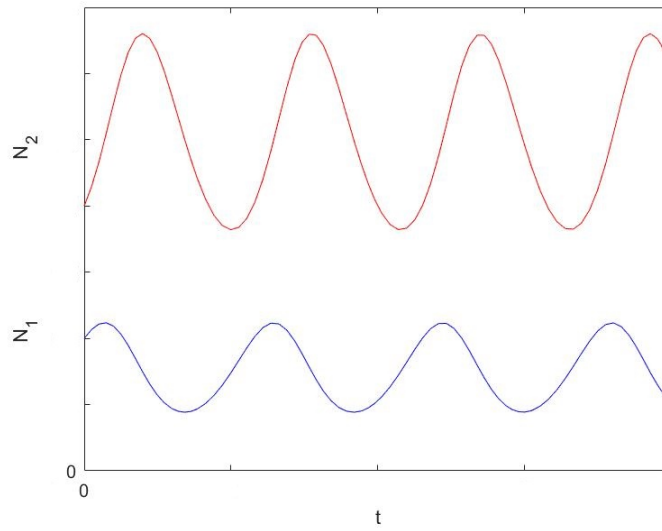
$$V(N_1, N_2) = -\varepsilon_2 \ln N_1 - \varepsilon_1 \ln N_2 + \gamma_2 N_1 + \gamma_1 N_2.$$

Potom každá orbita systému je daná implicitne rovnicou $V(N_1, N_2) = C$ pre konštantu C , ktorá je definovaná počiatočnými podmienkami. Trajektórie systému (2.1) sú zobrazené na obrázku 2.2.



Obr. 2.2: Trajektórie systému (2.1)

Všetky trajektórie sú teda uzavreté krivky, ktoré vo svojom vnútri nutne obsahujú bod $[\varepsilon_2/\gamma_2, \varepsilon_1/\gamma_1]$. Dôkaz môžeme nájsť napr. v [3]. Z uzavretosti kriviek tiež vyplýva, že riešenia sú periodické. Stav jednotlivých populácií v čase t môžeme vidieť na obrázku 2.3 .



Obr. 2.3: Stav jednotlivých populácií v závislosti na čase

Veľkosti populácií koristi a dravcov sa teda periodicky opakujú, pričom kolísajú okolo rovnovážnych stavov; N_1 okolo ε_2/γ_2 , N_2 okolo ε_1/γ_1 .

Kapitola 3

Model s vnútrodruhovou konkurenciou

Klasický model Lotka - Volterra popisujúci vzťah dravec - korisť, ktorý sme rozebírali v prvej kapitole, má viacero nedostatkov. Uvažovali sme v ňom napríklad, že zdroj potravy koristi je neobmedzený a teda populácia koristi bez prítomnosti dravca rastie donekonečna. V skutočnosti to však nie je možné, pretože korisť má len obmedzené množstvo potravy. Pri veľkom počte jedincov teda dochádza k tzv. vnútrodruhej konkurencii, kedy jedince navzájom bojujú o potravu. Ďalším výrazným nedostatkom je to, že je systém veľmi citlivý na poruchy. Akákoľvek malá zmena v počiatočnej veľkosti populácie spôsobí, že sa dostaneme na odlišnú orbitu. Tieto nedostatky sa pokúsime odstrániť v nasledujúcom modeli s vnútrodruhovou konkurenciou odvodenom napríklad v [1], [3].

3.1 Predpoklady a popis modelu

Majme teda rovnaké predpoklady ako v modeli Lotka - Volterra len s tou zmenou, že Malthusov model rastu populácie v prvom predpoklade nahradíme Verhulstovým logistickým modelom. Rast populácie koristi bez prítomnosti dravcov potom bude popisovať rovnica $dN_1/dt = (\varepsilon_1 - \alpha N_1)N_1$, kde $\alpha > 0$ a člen $-\alpha N_1$ popisuje vnútrodruhovú konkurenciu v populácii koristi. Dostávame tak nasledujúcu sústavu diferenciálnych rovníc

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \alpha N_1 - \gamma_1 N_2)N_1, \quad N_2' = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)N_2, \quad (3.1)$$

kde N_1 opäť popisuje veľkosť populácie koristi, N_2 popisuje veľkosť populácie dravca, ε_1 je špecifická miera rastu populácie koristi, $-\varepsilon_2$ je špecifická miera rastu populácie dravca, α popisuje mieru vnútrodruhej konkurencie koristi, $-\gamma_1$ je koeficient predácie a γ_2 je miera pôrodnosti dravca na jednu korisť.

3.2 Singulárne body, smerové pole, trajektórie

Každý počiatočný problém pre tento systém má jediné úplné riešenie. Opäť nás budú zaujímať len riešenia, ktorých trajektórie ležia v prvom kvadrante.

Systém (3.1) má singulárne body $[0,0]$, $[\varepsilon_1/\alpha, 0]$ a pre $\gamma_2\varepsilon_1 > \alpha\varepsilon_2$ tiež

$$[N_1^*, N_2^*] = \left[\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\gamma_2\varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_2}{\gamma_1\gamma_2} \right].$$

Jacobiho matica je v tvare

$$J(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - 2\alpha N_1 - \gamma_1 N_2 & -\gamma_1 N_1 \\ \gamma_2 N_2 & -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1 \end{bmatrix}.$$

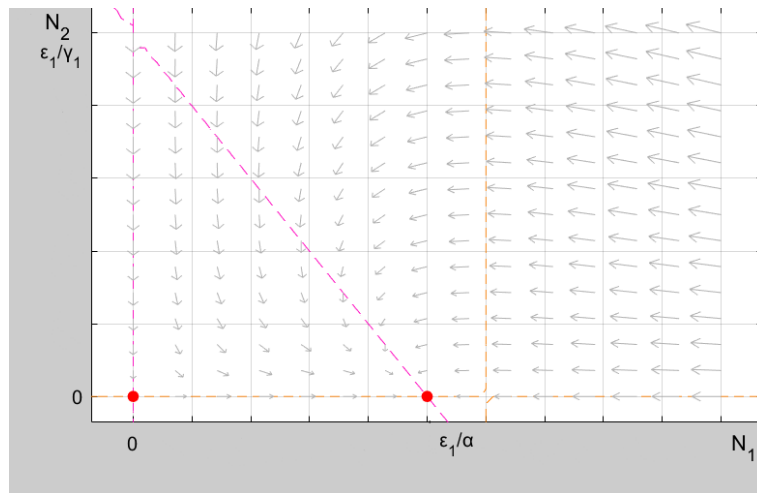
Po dosadení singulárneho bodu $[0,0]$ do Jacobiho matice obdržíme nasledovné

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Vlastné čísla tejto matice sú $\varepsilon_1 > 0$ a $-\varepsilon_2 < 0$, takže podľa Vety 6 a 7 je singulárny bod $[0,0]$ sedlo. Ďalej uvažujme prípad, keď $\gamma_2 \varepsilon_1 < \alpha \varepsilon_2$. Vlastné čísla matice

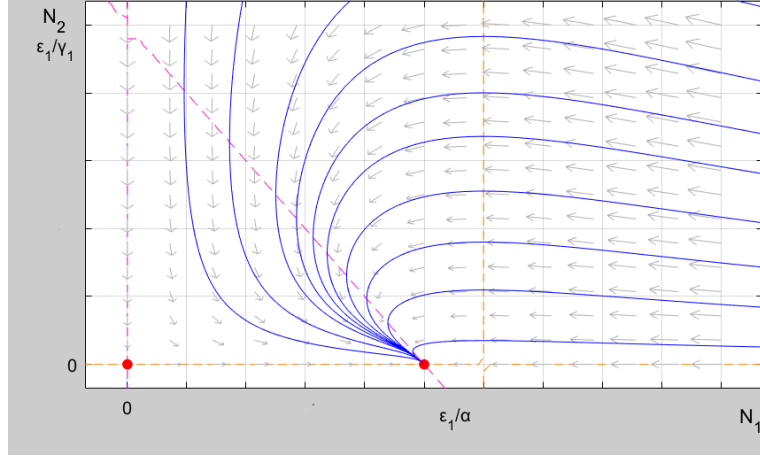
$$J\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}, 0\right) = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 & -\frac{\gamma_1 \varepsilon_1}{\alpha} \\ 0 & \frac{\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2}{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

sú $-\varepsilon_1 < 0$, $(\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2)/\alpha < 0$. Obe vlastné čísla sú záporné, singulárny bod $[\varepsilon_1/\alpha, 0]$ je teda podľa Vety 6 a 7 uzol. Smerové pole môžeme vidieť na obrázku 3.1.



Obr. 3.1: Smerové pole sústavy (3.1) v prípade, keď $\gamma_2 \varepsilon_1 < \alpha \varepsilon_2$

V tomto prípade teda všetky riešenia, ktorých trajektórie prechádzajú nejakým bodom ležiacim v prvom kvadrante, sa pre $t \rightarrow \infty$ limitne blížia k bodu $[\varepsilon_1/\alpha, 0]$ (obr. 3.2). To znamená, že populácia dravca vymrie a veľkosť populácie koristi sa ustáli na hodnote ε_1/α .



Obr. 3.2: Trajektórie sústavy 3.1 v prípade, keď $\gamma_2 \varepsilon_1 < \alpha \varepsilon_2$

Uvažujme teraz prípad, keď $\gamma_2 \varepsilon_1 > \alpha \varepsilon_2$. Vlastné čísla matice (3.2) sú v tomto prípade $-\varepsilon_1 < 0$, $(\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2)/\alpha > 0$. Sú to teda reálne čísla s opačnými znamienkami, z čoho podľa Vety 6 a 7 vyplýva, že singulárny bod $[\varepsilon_1/\alpha, 0]$ je sedlo.

Dosadením singulárneho bodu $[N_1^*, N_2^*]$ do Jacobiho matice obdržíme maticu

$$J(N_1^*, N_2^*) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha \varepsilon_2}{\gamma_2} & -\frac{\gamma_1 \varepsilon_2}{\gamma_2} \\ \frac{\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2}{\gamma_1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Charakteristická rovnica tejto matice

$$\lambda^2 + \frac{\alpha \varepsilon_2}{\gamma_2} \lambda + \frac{\varepsilon_2 (\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2)}{\gamma_2} = 0$$

má korene

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \varepsilon_2 \pm \sqrt{D}}{2\gamma_2},$$

kde $D = \alpha^2 \varepsilon_2^2 - 4\gamma_2 \varepsilon_2 (\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2)$. Ak je $D \geq 0$, potom z predpokladu $\gamma_2 \varepsilon_1 > \alpha \varepsilon_2$ plynie, že $\sqrt{D} < \alpha \varepsilon_2$ a teda vlastné čísla matice (3.3) sú reálne záporné. Ak je $D < 0$, potom sú vlastné čísla matice (3.3) komplexne združené a majú záporné reálne časti.

Vyšetrite si najskôr, za akých podmienok je singulárny bod $[N_1^*, N_2^*]$ ohniskom. V takom prípade musí byť podľa Vety 6 a 7 diskriminant záporný a teda

$$\alpha^2 \varepsilon_2^2 - 4\gamma_2 \varepsilon_2 (\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2) < 0.$$

Po úprave dostávame nerovnicu

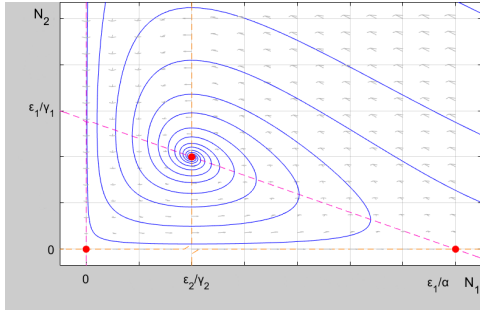
$$\varepsilon_2 \alpha^2 + 4\varepsilon_2 \gamma_2 \alpha - 4\varepsilon_1 \gamma_2^2 < 0.$$

Rovnica $\varepsilon_2 \alpha^2 + 4\varepsilon_2 \gamma_2 \alpha - 4\varepsilon_1 \gamma_2^2 = 0$ má jeden kladný koreň

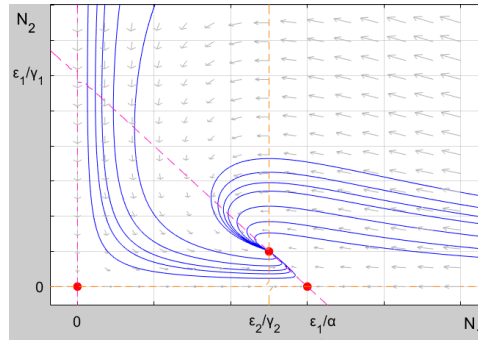
$$\alpha^* = 2\gamma_2 \left(\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} - 1 \right)$$

a jeden záporný koreň. Keďže koeficient α má byť kladný, dostávame podmienku, že ak je $\alpha \in (0, \alpha^*)$, potom je singulárny bod $[N_1^*, N_2^*]$ podľa Vety 6 a 7 ohniskom. Ak je $\alpha \geq \alpha^*$, potom je singulárny bod $[N_1^*, N_2^*]$ podľa Vety 6 a 7 uzlom.

Trajektórie systému (3.1) pre jednotlivé situácie môžeme vidieť na obrázkoch 3.3 a 3.4.



Obr. 3.3: Trajektórie sústavy (3.1) v prípade, keď $\alpha \in (0, \alpha^*)$



Obr. 3.4: Trajektórie sústavy (3.1) v prípade, keď $\alpha \geq \alpha^*$

Veľkosť populácie koristi sa teda ustáli na hodnote N_1^* a veľkosť populácie dravca na hodnote N_2^* .

Prípad, keď $\gamma_2 \varepsilon_1 = \alpha \varepsilon_2$ nemá z hľadiska aplikácií význam, pretože je veľmi nepravdepodobné, že skutočné hodnoty parametrov budú presne také, aby splnili túto rovnosť.

Kapitola 4

Modely dravec - korisť Gauseho typu

V predchádzajúcich kapitolách sme si zostavili a analyzovali dva modely popisujúce vzťah dravec - korisť. Obidva modely vysvetľovali javy vyskytujúce sa v skutočných spoločenstvách. V oboch sa vyskytoval stacionárny stav, okolo ktorého kolísali alebo k nemu smerovali veľkosti uvažovaných populácií. Poloha tohoto stacionárneho stavu závisela na špecifických mierach rastu jednotlivých populácií. Takáto závislosť býva pozorovaná napríklad pri morskom rybolove.

Tieto modely však nie sú bez chyby. Nedostatky klasického modelu Lotka - Volterra sme si už spomínali v kapitole 3. Tiež sme si spomenuli, že tieto nedostatky možno odstrániť, pokiaľ Malthusov model rastu populácie v prvom predpoklade vymeníme za Verhulstov logistický model. Tým sme však získali model, ktorý zase nevysvetľuje cyklické kolísanie početnosti populácií.

V tejto kapitole si zostavíme model, ktorý uvedené nedostatky nemá a môžeme ho nájsť napr. v [3].

4.1 Predpoklady a zostavenie modelu

Označme opäť N_1 veľkosť populácie koristi a N_2 veľkosť populácie dravca. Ďalej predpokladajme, že:

1. Prírastok alebo úbytok izolovanej populácie koristi je úmerný jej veľkosti. Prítom špecifická miera rastu μ_1 závisí len na veľkosti populácie, tj. $\mu_1 = \mu_1(N_1)$.
2. Jeden dravec za jednotku času zabije V jedincov koristi. Množstvo ulovenej koristi môže závisieť na množstve koristi (ak je koristi menej, dravcom zaberie viac času, kým nejakú korisť nájdú, ak je koristi viac, môže sa napríklad útoku dravca brániť) aj na množstve dravcov (dravci môžu pri love koristi spolupracovať alebo sa naopak vzájomne od koristi odháňať), takže $V = V(N_1, N_2)$.
3. Populácia koristi je jediným alebo aspoň dominantným zdrojom potravy pre populáciu dravca. To znamená, že populácia dravca vymiera v prostredí, kde nie sú jedince z uvažovanej populácie koristi. Predpokladajme ďalej, že toto vymieranie má konštantnú rýchlosť $\varepsilon_2 > 0$.
4. Pokiaľ dravce majú korisť, môžu sa rozmnožovať. Jeden dravec má v takom prípade za jednotku času μ_2 potomkov. Špecifická miera pôrodnosti dravca μ_2 teda závisí na množstve skonzumovanej koristi, tj. $\mu_2 = \mu_2(V)$.

Tieto predpoklady vedú k nasledujúcej sústave diferenciálnych rovníc

$$N_1' = \mu_1(N_1)N_1 - V(N_1, N_2)N_2, \quad N_2' = [-\varepsilon_2 + \mu_2(V(N_1, N_2))]N_2. \quad (4.1)$$

Konkrétne modely z nej potom dostaneme špecifikovaním funkcií μ_1, μ_2, V .

Budeme predpokladať, že izolovaná populácia koristi sa vyvíja podľa Verhulstovho modelu, tj. $\mu_1(N_1) = \varepsilon_1 - \alpha N_1$, kde ε_1, α sú kladné konštanty. Ďalej budeme pre jednoduchosť predpokladať, že dravci pri love koristi nespolupracujú, ani si nijako neprekážajú. Funkcia V teda na druhej premennej nijako nezávisí, a teda $V = V(N_1)$. Ďalším zjednodušujúcim predpokladom bude to, že množstvo skonsumovanej koristi sa priamo podieľa na raste populácie dravca, tj. $\mu_2(V) = \kappa V$, kde kladná konštanta κ predstavuje efektívnosť premeny populácie koristi na populáciu dravca. Za uvedených predpokladov sa sústava (4.1) zjednoduší na tvar

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \alpha N_1)N_1 - V(N_1)N_2, \quad N_2' = [-\varepsilon_2 + \kappa V(N_1)]N_2. \quad (4.2)$$

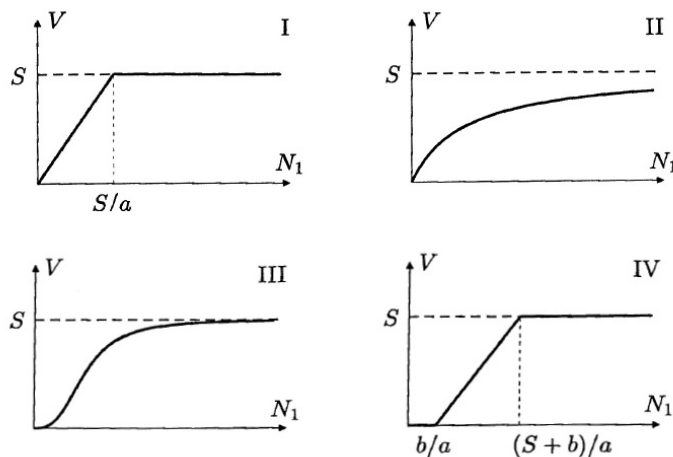
Zostáva ešte špecifikovať funkciu V , ktorá sa nazýva *trofická funkcia* alebo *funkčná odpoveď* predátora.

4.2 Trofická funkcia a jej typy

Modely uvedené v kapitole 2 a 3 môžeme považovať za modely typu (4.2) s trofickou funkciou $V(N_1) = \gamma_1 N_1$. Ako sme si však už na začiatku tejto kapitoly povedali, tento prípad trofickej funkcie nie je realistický, pretože funkcia V je neohraničená. V skutočnosti však jeden dravec aj pri neobmedzenom množstve potravy skonsumuje len jej určité množstvo, ktoré predstavuje jeho *hladinu nasýtenia*. Predpokladáme, že funkcia V je spojitá a splňa nasledujúce podmienky:

- $V(0)=0$ - pokiaľ nie je dostupná žiadna korisť, dravci nič neulovia.
- $\lim_{N_1 \rightarrow \infty} V(N_1) = S$ - pri nadbytku koristi uloví jeden dravec za jednotku času maximálne S jedincov koristi.
- Funkcia V je neklesajúca - pokiaľ vzrastie množstvo dostupnej koristi, dravci jej neulovia menej.

Môžeme rozlíšiť štyri typy trofickej funkcie, ktoré splňajú tieto podmienky (obrázok 4.1) a sú uvedené napríklad v [3].



Obr. 4.1: Typy trofickej funkcie

Typ I. Pokiaľ je koristi menej, než predstavuje hladinu nasýtenia dravca, potom množstvo ulovenej koristi je priamo úmerné množstvu dostupnej koristi. V prípade nadbytku koristi množstvo zničenej koristi odpovedá hladine nasýtenia dravca. Tento typ trofickej funkcie môžeme vyjadriť v tvare

$$V(x) = \begin{cases} ax, & x < S/a \\ S, & x \geq S/a, \end{cases}$$

kde a je kladná konštanta. Je charakteristický napríklad pre predátory loviace koristi filtrovaním vody.

Typ II. Konkávne rastúca diferenciovateľná funkcia, ktorá sa asymptoticky blíži k hladine nasýtenia. V podstate je hladkou aproximáciou funkcie typu I. K vyhladeniu dochádza, keď dravec presne nerozlišuje medzi nasýtením a skoro nasýtením. Tento typ je charakteristický pre viaceré bezstavovce.

Typ III. Rastúca funkcia, ktorej grafom je hladká krivka blížiac sa asymptoticky k hladine nasýtenia. Je hladkou aproximáciou trofickej funkcie typu IV. Vyhladenie môže byť spôsobené súčasnou existenciou úkrytu koristi a alternatívnych zdrojov potravy dravca.

Trofické funkcie typu II a III môžeme vyjadriť napríklad v tvare

$$V(x) = S\left(\frac{ax^k}{ax^k+1}\right) \quad \text{alebo} \quad V(x) = S(1 - e^{-ax^k}),$$

kde a je kladná konštanta a $k \in (0, 1)$ pre trofickú funkciu typu II, $k > 1$ pre trofickú funkciu typu III.

Typ IV. Tento tvar môže mať funkcia buď v prípade, keď má korisť v prostredí možnosť úkrytu, čím je táto ukrytá časť koristi pre dravce nedostupná a dravci lovia len neukryté jedince, alebo v prípade, keď dravci korisť ignorujú, pokiaľ jej je málo a začnú ju loviť až keď jej množstvo presiahne určitú prahovú hodnotu. Druhá spomínaná situácia môže nastať, pokiaľ uvažovaná korisť netvorí jediný zdroj potravy dravca. Tento typ trofickej funkcie môžeme vyjadriť v tvare

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < b/a \\ ax - b, & b/a \leq x \leq (S + b)/a \\ S, & x > (S + b)/a, \end{cases}$$

kde a, b sú kladné konštanty. Je charakteristický hlavne pre stavovce.

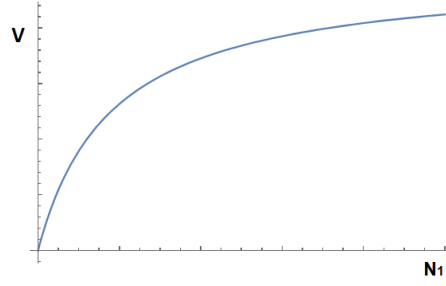
My si na podrobnejšiu analýzu zvolíme trofické funkcie typu II. a typu III.

4.3 Model dravec - korisť s limitným cyklom (model s trofickou funkciou typu II)

4.3.1 Popis modelu

Uvažujme teda sústavu diferenciálnych rovníc 4.2, kde κ položíme $\kappa = \gamma_2/\gamma_1$ a trofickú funkciu zvolíme v tvare

$$V(N_1) = \frac{\gamma_1 N_1}{p + N_1}$$



Obr. 4.2: Trofická funkcia

Z obrázku 4.2 môžeme vidieť, že ide o trofickú funkciu typu II (viď obr. 4.1). Systém (4.2) potom bude vyzeráť nasledovne

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \alpha N_1)N_1 - \frac{\gamma_1}{p + N_1}N_1N_2, \quad N_2' = -\varepsilon_2N_2 + \frac{\gamma_2}{p + N_1}N_1N_2, \quad (4.3)$$

kde $\alpha > 0$, $p > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ sú konštanty. Čo popisujú členy N_1 , N_2 , ε_1 , $-\varepsilon_2$, γ_1 , γ_2 sme si vysvetlili už v predchádzajúcich kapitolách (viď sekcia 2.1).

Stredná rýchlosť rastu veľkosti populácie v tomto novom modeli teda nie je konštantná, ale je daná výrazom $\varepsilon_1 - \alpha N_1$, kde α je koeficient znižovania rýchlosti rastu veľkosti populácie koristi. U dravca zostáva stredná rýchlosť rastu veľkosti populácie konštantná. O úbytku koristi vplyvom konzumácie dravcom za jednotku času už nepredpokladáme, že je priamo úmerný súčinu N_1N_2 , ale konštanta priamej úmernosti γ_1 je nahradená výrazom $\gamma_1/(p + N_1)$.

Pre malé $N_1 > 0$ je výraz

$$\frac{\gamma_1}{p + N_1}N_1N_2 \quad (4.4)$$

blízky k $\frac{\gamma_1}{p}N_1N_2$, takže okamžitý úbytok veľkosti populácie koristi vplyvom toho, že je konzumovaná dravcom, je podobne ako pri modeli Lotka - Volterra prakticky priamo úmerný N_1 a N_2 , zatiaľ čo pre veľké $N_1 > 0$ je výraz (4.4) blízky k $\gamma_1 N_2$. Vyššie spomenutý úbytok môžeme teda pre veľké N_1 považovať za priamo úmerný len N_2 . Táto vlastnosť modelu je realistickejšia ako tomu bolo u klasického modelu Lotka - Volterra a dá sa očakávať, že nový model bude lepšie odrážať skutočnosť a bude lepšie korešpondovať s výsledkami pozorovania. Rovnaká úvaha platí aj pre okamžitý prírastok veľkosti populácie dravca vplyvom konzumácie koristi, kde konštanta γ_2 je nahradená výrazom $\gamma_2/(p + N_1)$. Poznamenajme, že tento model môžeme nájsť v [3].

4.3.2 Singulárne body. smerové pole, trajektórie

Rovnako ako v knihe [3] budeme predpokladať, že $\alpha p < \varepsilon_1$ a

$$\gamma_2 > \frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \alpha p)}{\varepsilon_1 - \alpha p}.$$

Tieto dve podmienky môžeme zhrnúť do jednej nerovnosti

$$(\varepsilon_1 - \alpha p)\gamma_2 > \varepsilon_2(\varepsilon_1 + \alpha p), \quad (4.5)$$

ktorú môžeme prepísať na tvar

$$\alpha p(\gamma_2 + \varepsilon_2) < \varepsilon_1(\gamma_2 - \varepsilon_2). \quad (4.6)$$

Z nerovnosti (4.6) potom plynie nasledovné

$$\gamma_2 > \varepsilon_2 \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_1 \gamma_2 > \varepsilon_2(\varepsilon_1 + \alpha p). \quad (4.8)$$

Opäť nás budú zaujímať predovšetkým riešenia ležiace v \mathbb{R}_+^2 .

Systém (4.3) môžeme prepísať na ekvivalentný tvar

$$\begin{aligned} N_1' &= [(\varepsilon_1 - \alpha N_1)(p + N_1) - \gamma_1 N_2] \frac{N_1}{p + N_1}, \\ N_2' &= [\gamma_2 N_1 - p\varepsilon_2 - N_1\varepsilon_2] \frac{N_2}{p + N_1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Uvažovaný systém má singulárne body $[0, 0]$ a $[\varepsilon_1/\alpha, 0]$. Ďalší singulárny bod dostaneme riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 - \alpha N_1)(p + N_1) - \gamma_1 N_2 &= 0, \\ \gamma_2 N_1 - \varepsilon_2 p - \varepsilon_2 N_1 &= 0. \end{aligned}$$

Singulárny bod má teda tvar

$$[N_1^*, N_2^*] = \left[\frac{\varepsilon_2 p}{\gamma_2 - \varepsilon_2}, \frac{(\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha \varepsilon_2 p) p \gamma_2}{\gamma_1 (\gamma_2 - \varepsilon_2)^2} \right]$$

a podľa predpokladu (4.5) leží v prvom kvadrante. Jacobiho matica systému (4.9) je

$$J(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - 2\alpha N_1 - \gamma_1 N_2 \frac{p}{(p+N_1)^2} & -\gamma_1 \frac{N_1}{p+N_1} \\ \gamma_2 N_2 \frac{p}{(p+N_1)^2} & \gamma_2 \frac{N_1}{p+N_1} - \varepsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Po dosadení singulárneho bodu $[0, 0]$ do Jacobiho matice dostávame

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{bmatrix},$$

a teda vlastné čísla tejto matice sú $\lambda_1 = \varepsilon_1 > 0$ a $\lambda_2 = -\varepsilon_2 < 0$. Podľa Vety 6 a 7 je singulárny bod $[0, 0]$ typu sedlo.

V bode $[\varepsilon_1/\alpha, 0]$ má Jacobiho matica tvar

$$J\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}, 0\right) = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 & -\gamma_1 \frac{\varepsilon_1}{p\alpha + \varepsilon_1} \\ 0 & \gamma_2 \frac{\varepsilon_1}{p\alpha + \varepsilon_1} - \varepsilon_2 \end{bmatrix},$$

takže vlastné čísla vychádzajú

$$\lambda_1 = -\varepsilon_1 < 0, \quad \lambda_2 = \gamma_2 \frac{\varepsilon_1}{p\alpha + \varepsilon_1} - \varepsilon_2 > 0.$$

Singulárny bod $[\varepsilon_1/\alpha, 0]$ je teda podľa Vety 6 a 7 tiež typu sedlo.

V bode $[N_1^*, N_2^*]$ dostávame

$$J(N_1^*, N_2^*) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_2[-p\alpha(\gamma_2 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1(\gamma_2 - \varepsilon_2)]}{\gamma_2(\gamma_2 - \varepsilon_2)} & -\gamma_1 \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \\ \frac{\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - p\alpha\varepsilon_2}{\gamma_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Charakteristická rovnica je v tvare

$$\lambda^2 - \frac{\varepsilon_2[-p\alpha(\gamma_2 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1(\gamma_2 - \varepsilon_2)]}{\gamma_2(\gamma_2 - \varepsilon_2)}\lambda + \frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - p\alpha\varepsilon_2)}{\gamma_2} = 0,$$

pričom korene tejto rovnice sú

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2},$$

kde

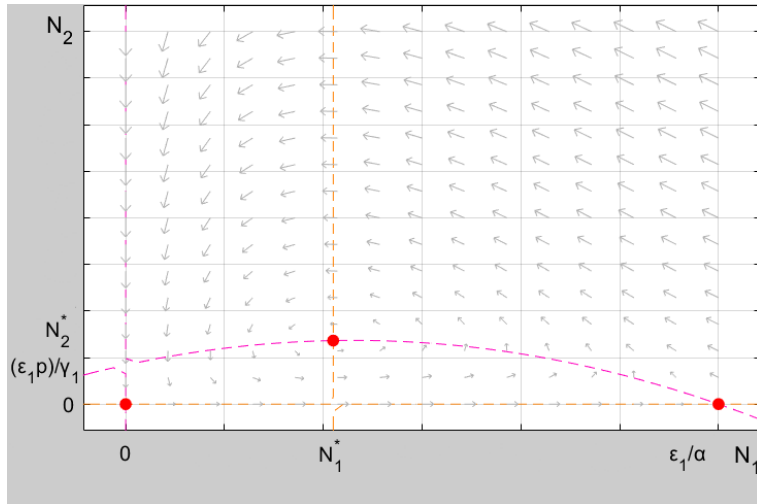
$$b = \frac{\varepsilon_2[-p\alpha(\gamma_2 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1(\gamma_2 - \varepsilon_2)]}{\gamma_2(\gamma_2 - \varepsilon_2)}$$

a

$$D = b^2 - 4 \frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - p\alpha\varepsilon_2)}{\gamma_2}.$$

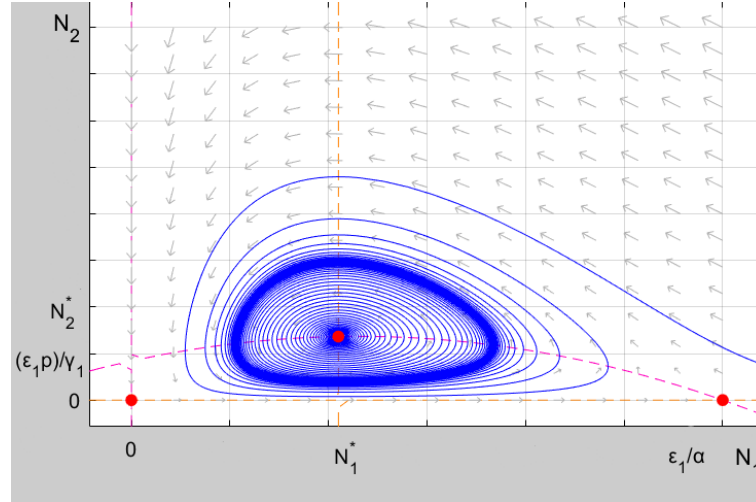
Podľa predpokladov (4.6) a (4.8) je $b > 0$ a $D < b^2$. Vlastné čísla preto majú kladné reálne časti, a teda singulárny bod $[N_1^*, N_2^*]$ je podľa Vety 6 a 7 buď nestabilný uzol (v prípade $D \geq 0$), alebo nestabilné ohnisko (v prípade $D < 0$).

Smerové pole systému (4.3) s vyznačenými singulárnymi bodmi môžeme vidieť na obrázku 4.3.



Obr. 4.3: Smerové pole systému (4.3)

Trajektóriu tohoto systému je limitný cyklus zobrazený na obrázku 4.4 (dôkaz existencie limitného cyklu môžeme nájsť napr. v [3]).



Obr. 4.4: Limitný cyklus

To znamená, že po uplynutí istého prechodného obdobia sa veľkosti populácií dravca a koristi periodicky opakujú, pričom stav koristi, resp. dravca, kolísá okolo strednej hodnoty

$$\frac{\varepsilon_2 p}{\gamma_2 - \varepsilon_2},$$

resp.

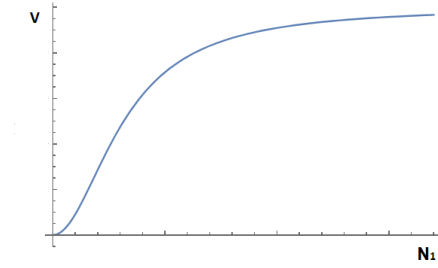
$$\frac{(\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha \varepsilon_2 p) p \gamma_2}{\gamma_1 (\gamma_2 - \varepsilon_2)^2}.$$

4.4 Model s trofickou funkciou typu III

Uvažujme opäť sústavu diferenciálnych rovníc (4.2), pričom trofickú funkciu tentokrát zvolíme podľa [3] v tvare

$$V(N_1) = S \frac{aN_1^k}{aN_1^k + 1},$$

kde $k > 1$. Na obrázku 4.5 môžeme vidieť, že ide skutočne o trofickú funkciu typu III (viď obr. 4.1).



Obr. 4.5: Trofická funkcia

Dostávame tak nasledujúcu sústavu diferenciálnych rovníc

$$N_1' = (\varepsilon_1 - \alpha N_1)N_1 - S \frac{aN_1^k}{aN_1^k + 1} N_2, \quad N_2' = -\varepsilon_2 N_2 + \kappa S \frac{aN_1^k}{aN_1^k + 1} N_2, \quad (4.10)$$

kde a, p sú kladné konštanty. Čo vyjadrujú zvyšné členy systému sme si už vysvetlili v predchádzajúcich kapitolách.

4.4.1 Singulárne body, trajektórie systému

Aby mohla populácia dravca dlhodobo prežívať, musí byť špecifická miera jej rastu $-\varepsilon_2 + \kappa V(N_1)$ kladná aspoň v prípade, keď má populácia koristi maximálnu veľkosť. Budeme teda predpokladať, že platí nasledujúca nerovnosť

$$V\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) > \frac{\varepsilon_2}{\kappa}, \quad (4.11)$$

kde ε_1/α značí kapacitu prostredia.

Systém (4.10) má singulárne body $[0, 0]$, $[\varepsilon_1/\alpha, 0]$, $[N_1^*, N_2^*]$, kde

$$[N_1^*, N_2^*] = \left[\sqrt[k]{\frac{\varepsilon_2}{a(\kappa S - \varepsilon_2)}}, \frac{\kappa(\varepsilon_1 \sqrt[k]{\frac{\varepsilon_2}{a(\kappa S - \varepsilon_2)}} - \alpha \frac{\varepsilon_2}{a(\kappa S - \varepsilon_2)})}{\varepsilon_2} \right].$$

Jacobiho matica systému (4.2) má obecné tvar

$$J(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - 2\alpha N_1 - V'(N_1)N_2 & -V(N_1) \\ \kappa V'(N_1)N_2 & -\varepsilon_2 + \kappa V(N_1) \end{bmatrix}$$

a po dosadení našej trofickej funkcie dostávame

$$J(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - 2\alpha N_1 - S \frac{akN_1^{k-1}}{(aN_1^k + 1)^2} N_2 & -S \frac{aN_1^k}{aN_1^k + 1} \\ \kappa S \frac{akN_1^{k-1}}{(aN_1^k + 1)^2} N_2 & -\varepsilon_2 + \kappa S \frac{aN_1^k}{aN_1^k + 1} \end{bmatrix}.$$

Matica

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

má vlastné čísla $\lambda_1 = \varepsilon_1 > 0$, $\lambda_2 = -\varepsilon_2 < 0$, a teda podľa Vety 6 a 7 je bod $[0, 0]$ sedlo. Matica

$$J\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}, 0\right) = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 & -S \frac{a(\frac{\varepsilon_1}{\alpha})^k}{a(\frac{\varepsilon_1}{\alpha})^{k+1}} \\ 0 & -\varepsilon_2 + \kappa S \frac{a(\frac{\varepsilon_1}{\alpha})^k}{a(\frac{\varepsilon_1}{\alpha})^{k+1}} \end{bmatrix}$$

má vlastné čísla $-\varepsilon_1 < 0$ a $\kappa V(\varepsilon_1/\alpha) - \varepsilon_2 > 0$ (druhá nerovnosť plyní z predpokladu (4.11)). Singulárny bod $[\varepsilon_1/\alpha, 0]$ je teda podľa Vety 6 a 7 tiež sedlo.

Pre lepšiu prehľadnosť si zavedme nasledujúce označenie

$$\delta = 2\alpha N_1^* - \varepsilon_1 + V'(N_1^*)N_2^*.$$

Matica

$$J(N_1^*, N_2^*) = \begin{bmatrix} -\delta & -V(N_1^*) \\ \kappa V'(N_1^*)N_2^* & 0 \end{bmatrix}$$

má charakteristickú rovnicu

$$\lambda^2 + \delta\lambda + \kappa N_2^* V(N_1^*) V'(N_1^*) = 0$$

$$\lambda^2 + \delta\lambda + \kappa N_2^* S \frac{aN_1^{*k}}{aN_1^{*k} + 1} S \frac{akN_1^{*k-1}}{(aN_1^{*k} + 1)^2} = 0$$

$$\lambda^2 + \delta\lambda + \kappa N_2^* S^2 \frac{a^2 k N_1^{*2k-1}}{(aN_1^{*k} + 1)^3} = 0,$$

ktorej korene sú

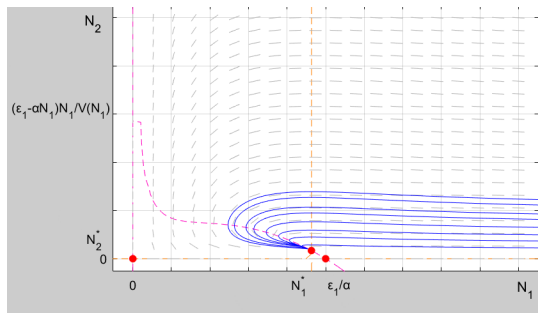
$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{D}}{2},$$

kde

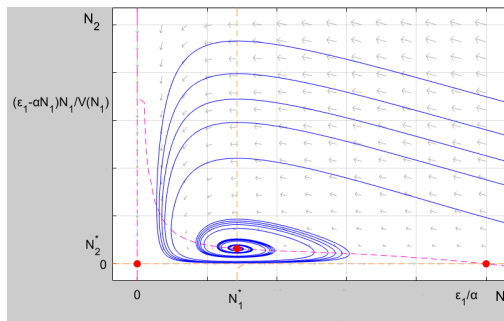
$$D = \delta^2 - 4\kappa N_2^* S^2 \frac{a^2 k N_1^{*2k-1}}{(aN_1^{*k} + 1)^3}.$$

Singulárny bod $[N_1^*, N_2^*]$ je teda podľa Vety 6 a 7 v prípade $D > 0$ uzlom a v prípade $D < 0$ ohniskom.

Trajektórie systému (4.10) v prípade, keď $D > 0$ (resp. $D < 0$) sú zobrazené na obrázku 4.6 (resp. 4.7)



Obr. 4.6: Trajektórie systému (4.10) v prípade, keď $D > 0$



Obr. 4.7: Trajektórie systému (4.10) v prípade, keď $D < 0$

V oboch prípadoch sa teda veľkosť populácie koristi ustáli na hodnote N_1^* a veľkosť populácie dravca na hodnote N_2^* .

Kapitola 5

Aplikácia modelov dravec - korisť

V predchádzajúcich kapitolách sme si postupne rozobrali tri typy modelov popisujúcich interakciu dravec - korisť. Teraz si do jednotlivých modelov dosadíme konkrétne hodnoty a pomocou softwaru Matlab si trajektórie týchto modelov vykreslíme.

5.1 Model Lotka - Volterra

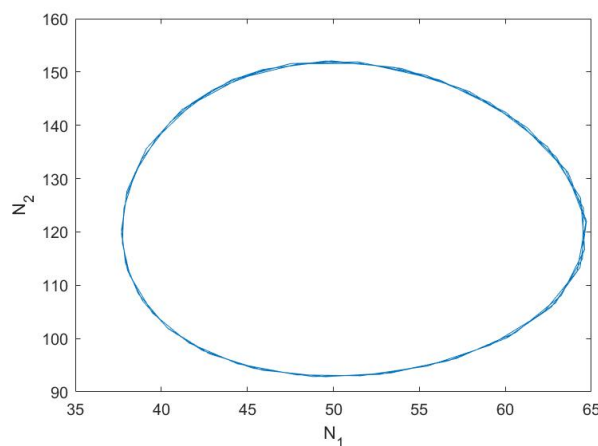
Uvažujme nasledovné hodnoty konštánt: $\varepsilon_1 = 1,2$; $\gamma_1 = 0,01$; $\varepsilon_2 = 1$; $\gamma_2 = 0,02$. Sústava (2.1) bude mať potom tvar

$$N_1' = (1,2 - 0,01N_2)N_1, \quad N_2' = (-1 + 0,02N_1)N_2. \quad (5.1)$$

Táto sústava má singulárne body $[0, 0]$ a $[50, 120]$. Vlastné čísla matice $J(0, 0)$ sú $\lambda_1 = 1,2$ a $\lambda_2 = -1$, a teda bod $[0, 0]$ je podľa Vety 6 a 7 sedlo. Vlastné čísla matice $J[50, 120]$ sú $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{1}, 2$. Singulárny bod $[50, 120]$ je podľa Vety 6 a 7 stred (viď sekcia 2.2.1).

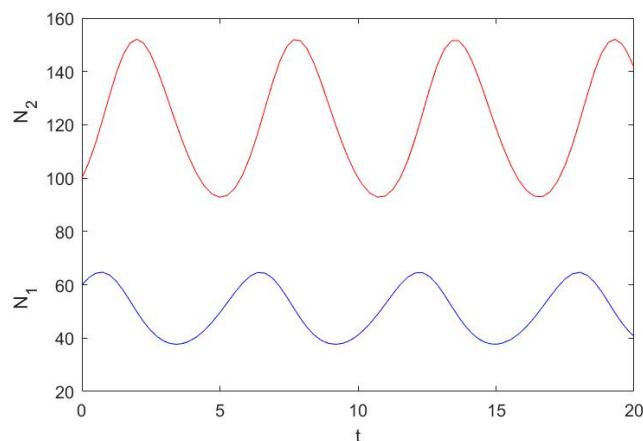
Trajektórie systému (5.1) sú uzavreté krivky, takže veľkosti populácií koristi a dravca sa budú periodicky opakovať, pričom veľkosť populácie koristi (resp. dravca) bude kolísať okolo hodnoty $N_1 = 50$ (resp. $N_2 = 120$).

Pre počiatočnú veľkosť populácie koristi $N_1 = 60$ a dravca $N_2 = 100$ bude mať systém nasledovnú trajektóriu



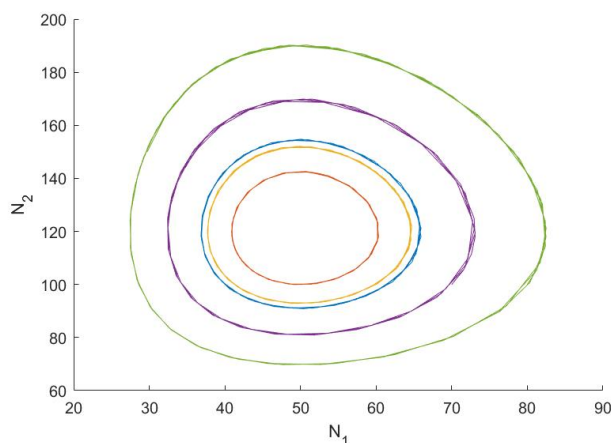
Obr. 5.1: Trajektória systému (5.1)

Veľkosti jednotlivých populácií v závislosti na čase môžeme vidieť na obrázku 5.2.



Obr. 5.2: Veľkosti jednotlivých populácií v závislosti na čase

Fázový portrét systému (5.1) pre počiatočnú veľkosť populácie dravca $N_2 = 100$ a rôzne počiatočné veľkosti populácie koristi $N_1 = 40$, $N_1 = 50$, $N_1 = 60$, $N_1 = 70$, $N_1 = 80$ je vykreslený na obrázku 5.3.



Obr. 5.3: Fázový portrét systému (5.1) pre $N_2 = 100$, $N_1 = 40$ až $N_1 = 80$

5.2 Model s vnútrodruhovou konkurenciou

5.2.1 Prípád $\gamma_2 \varepsilon_1 < \alpha \varepsilon_2$

Zvoľme teraz hodnoty konštánt $\varepsilon_1 = 1$; $\gamma_1 = 0,01$; $\varepsilon_2 = 1,2$; $\gamma_2 = 0,02$; $\alpha = 0,02$. Systém (3.1) bude v tvare

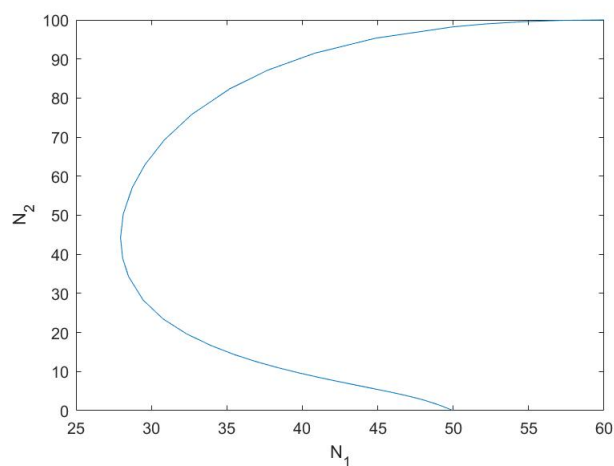
$$N_1' = (1 - 0,02N_1 - 0,01N_2)N_1, \quad N_2' = (-1,2 + 0,02N_1)N_2. \quad (5.2)$$

Tento systém má singulárne body $[0, 0]$ a $[50, 0]$. Vlastné čísla matice $J = [0, 0]$ sú $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1,2$, bod $[0, 0]$ je teda podľa Vety 6 a 7 sedlo. Vlastné čísla matice

$J = [50, 0]$ sú $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -0,2$, singulárny bod $[50, 0]$ je podľa Vety 6 a 7 uzol.

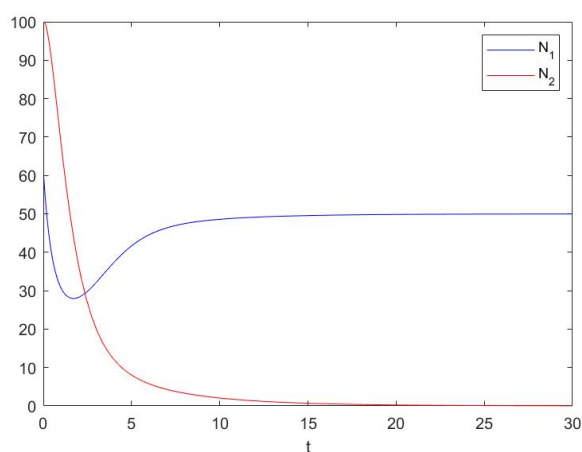
Veľkosť populácie koristi sa teda ustáli na hodnote $N_1 = 50$, pričom populácia dravca vymrie.

Pre počiatočnú veľkosť populácie koristi $N_1 = 60$ a dravca $N_2 = 100$ vyzerá trajektória systému (5.2) nasledovne



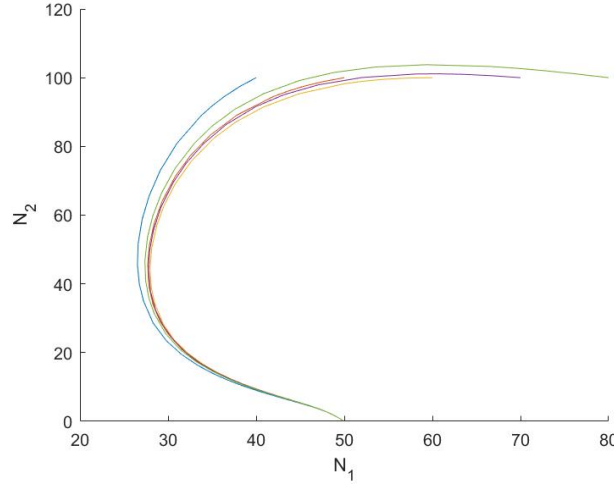
Obr. 5.4: Trajekória systému (5.2)

Veľkosti jednotlivých populácií v závislosti na čase môžeme vidieť na obrázku 5.5.



Obr. 5.5: Veľkosti jednotlivých populácií v čase t

Fázový portrét systému (5.2) pre počiatočnú veľkosť populácie dravca $N_2 = 100$ a rôzne počiatočné veľkosti populácie koristi $N_1 = 40$, $N_1 = 50$, $N_1 = 60$, $N_1 = 70$, $N_1 = 80$ vyzerá nasledovne



Obr. 5.6: Fázový portrét systému (5.2) pre $N_2 = 100$, $N_1 = 40$ až $N_1 = 80$

5.2.2 Prípad $\gamma_2\varepsilon_1 > \alpha\varepsilon_2$

Ak $\alpha \in (0, \alpha^*)$

Nech sú hodnoty konštánt $\varepsilon_1 = 1,4$; $\gamma_1 = 0,01$; $\varepsilon_2 = 0,8$; $\gamma_2 = 0,04$; $\alpha = 0,02$. Sústava rovníc (3.1) bude v tvare:

$$N_1' = (1,4 - 0,02N_1 - 0,01N_2)N_1, \quad N_2' = (-0,8 + 0,04N_1)N_2. \quad (5.3)$$

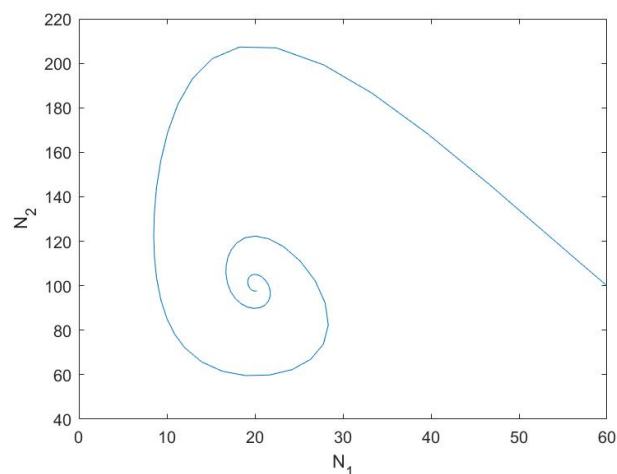
Singulárne body systému (5.3) sú $[0, 0]$, $[70, 0]$ a $[20, 100]$. Vlastné čísla matice $J = [0, 0]$ sú $\lambda_1 = 1,4$ a $\lambda_2 = -0,8$, bod $[0, 0]$ je teda podľa Vety 6 a 7 sedlo. Vlastné čísla matice $J(70, 0)$ sú $\lambda_1 = -1,4$ a $\lambda_2 = 2$, takže singulárny bod $[70, 0]$ je tiež sedlo (viď Veta 6 a 7). Vlastné čísla matice $J = (20, 100)$ sú

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0,016 \pm \sqrt{D}}{0,08},$$

kde $D = \alpha^2\varepsilon_2^2 - 4\gamma_2\varepsilon_2(\gamma_2\varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_2) = -0,004864 < 0$. V tomto prípade je teda podľa Vety 6 a 7 singulárny bod $[20, 100]$ ohnisko.

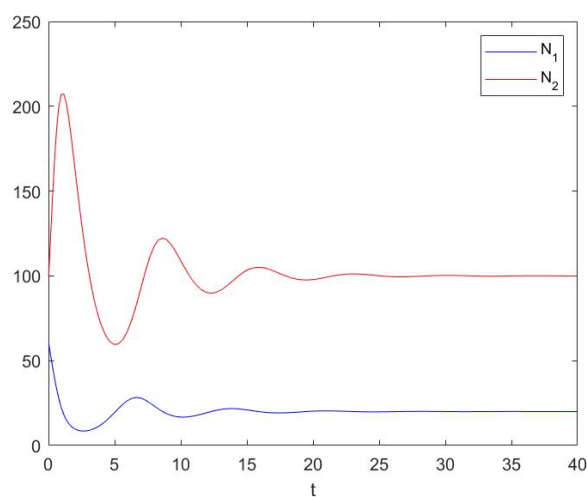
Veľkosť populácie koristi sa ustáli na hodnote $N_1 = 20$ a veľkosť populácie dravca na $N_2 = 100$.

Trajektória tohto systému pre počiatočné veľkosti populácie koristi $N_1 = 60$ a dravca $N_2 = 100$ je nasledovná



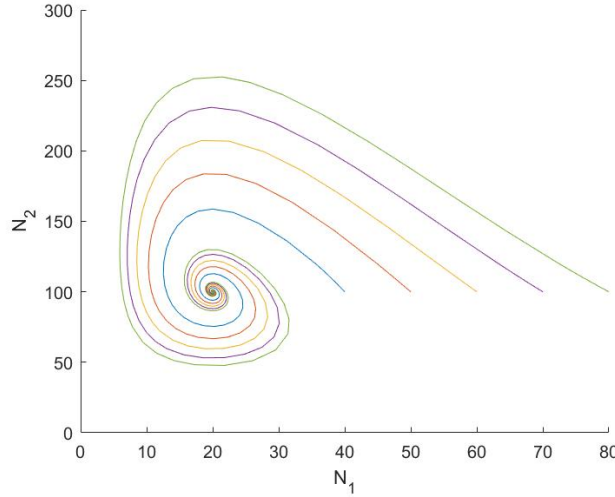
Obr. 5.7: Trajektória systému (5.3) pre $N_1 = 60$ a $N_2 = 100$

Veľkosti jednotlivých populácií v závislosti na čase t môžeme vidieť na obrázku 5.8.



Obr. 5.8: Veľkosti jednotlivých populácií v čase t

Trajektórie systému (5.3) pre počiatkovú veľkosť populácie dravca $N_2 = 100$ a rôzne počiatkové veľkosti populácie koristi $N_1 = 40$, $N_1 = 50$, $N_1 = 60$, $N_1 = 70$, $N_1 = 80$ sú zobrazené na obrázku 5.9.



Obr. 5.9: Trajektórie systému (5.3) pre $N_2 = 100$, $N_1 = 40$ až $N_1 = 80$

Ak $\alpha \geq \alpha^*$

Uvažujme nasledovné hodnoty konštánt: $\varepsilon_1 = 1,2$; $\gamma_1 = 0,01$; $\varepsilon_2 = 1$; $\gamma_2 = 0,02$; $\alpha = 0,02$. Sústava (3.1) bude mať tvar

$$N_1' = (1,2 - 0,02N_1 - 0,01N_2)N_1 \quad N_2' = (-1 + 0,02N_1)N_2. \quad (5.4)$$

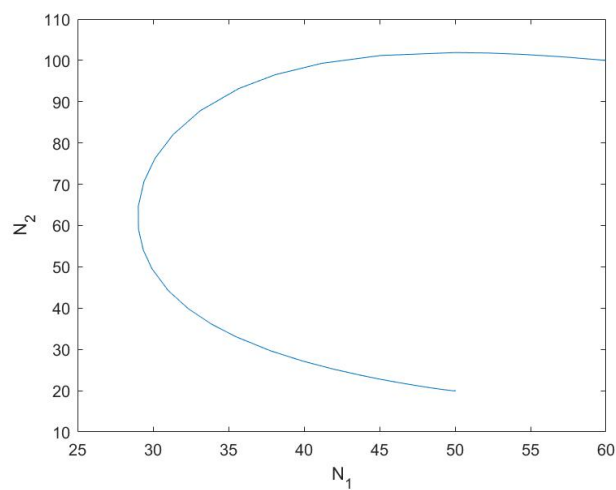
Singulárne body systému (5.4) sú $[0, 0]$, $[60, 0]$ a $[50, 20]$. Vlastné čísla matice $J = [0, 0]$ sú $\lambda_1 = 1,2$ a $\lambda_2 = -1$, bod $[0, 0]$ je teda podľa Vety 6 a 7 sedlo. Vlastné čísla matice $J(60, 0)$ sú $\lambda_1 = -1,2$ a $\lambda_2 = 0,2$, takže signulárny bod $[60, 0]$ je podľa Vety 6 a 7 tiež sedlo. Vlastné čísla matice $J = (50, 20)$ sú

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0,002 \pm \sqrt{D}}{0,04},$$

kde $D = \alpha^2 \varepsilon_2^2 - 4\gamma_2 \varepsilon_2 (\gamma_2 \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2) = 0,00008 > 0$. Singulárny bod $[50, 20]$ je v tomto prípade podľa Vety 6 a 7 uzol.

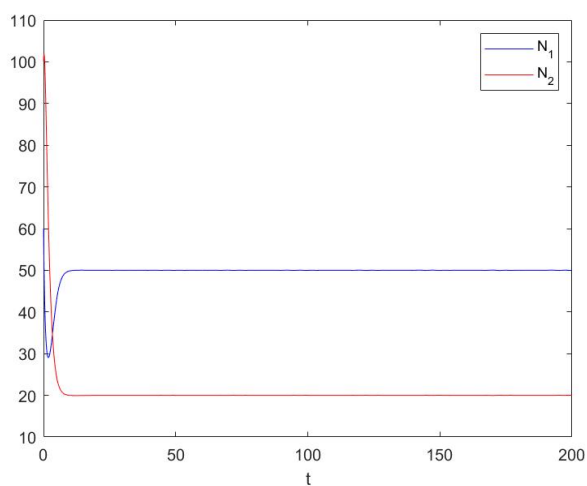
Veľkosť populácie koristi sa ustáli na hodnote $N_1 = 50$ a veľkosť populácie dravca na hodnote $N_2 = 20$.

Trajektória systému (5.4) pre počiatočné veľkosti populácie koristi $N_1 = 60$ a dravca $N_2 = 100$ je na obrázku 5.10.



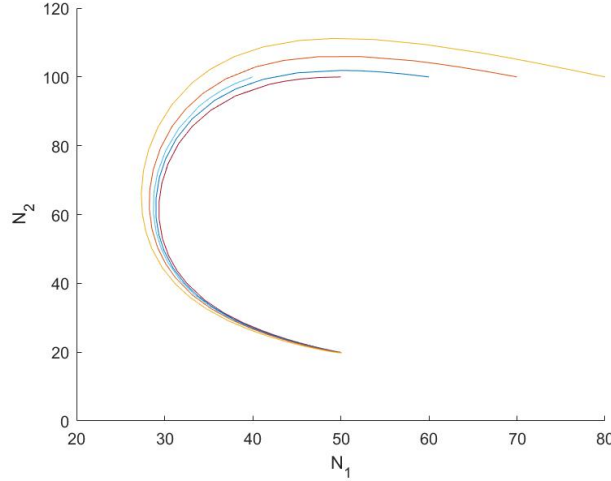
Obr. 5.10: Trajektória systému (5.4)

Veľkosti jednotlivých populácií v čase t sú zobrazené na obrázku nižšie.



Obr. 5.11: Veľkosti jednotlivých populácií v čase t

Trajektórie systému (5.4) pre počiatočnú veľkosť populácie dravca $N_2 = 100$ a rôzne počiatočné veľkosti populácie koristi $N_1 = 40$, $N_1 = 50$, $N_1 = 60$, $N_1 = 70$, $N_1 = 80$ môžeme vidieť na obrázku 5.12.



Obr. 5.12: Trajektórie systému (5.4) pre $N_2 = 100$, $N_1 = 40$ až $N_1 = 80$

5.3 Model typu Gause

5.3.1 S trofickou funkciou typu II.

Zvoľme si hodnoty konštánt nasledovne: $\varepsilon_1 = 1,5$; $\gamma_1 = 5$; $\varepsilon_2 = 6$; $\gamma_2 = 10$; $p = 28$; $\alpha = 1/80$. Sústava rovníc (4.3) bude v tvare

$$N_1' = \left(1,5 - \frac{1}{80}N_1\right)N_1 - \frac{5}{28 + N_1}N_1N_2, \quad N_2' = -6N_2 + \frac{10}{28 + N_1}N_1N_2. \quad (5.5)$$

Singulárne body systému (5.5) sú $[0, 0]$, $[120, 0]$ a $[42; 13,65]$. Vlastné čísla matice $J = [0, 0]$ sú $\lambda_1 = 1,5$ a $\lambda_2 = -6$, bod $[0, 0]$ je teda podľa Vety 6 a 7 sedlo. Vlastné čísla matice $J(120, 0)$ sú $\lambda_1 = -1,5$ a $\lambda_2 = 2,11$, takže singulárny bod $[120, 0]$ je podľa Vety 6 a 7 tiež sedlo. Vlastné čísla matice $J(42; 13,65)$ sú

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2},$$

kde

$$b = \frac{\varepsilon_2[-p\alpha(\gamma_2 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1(\gamma_2 - \varepsilon_2)]}{\gamma_2(\gamma_2 - \varepsilon_2)} = 0,06$$

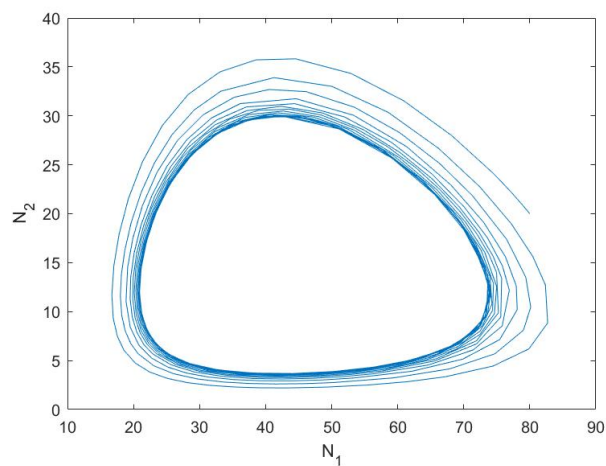
a

$$D = b^2 - 4 \frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - p\alpha\varepsilon_2)}{\gamma_2} = -9,3564 < 0.$$

Singulárny bod $[42; 13,65]$ je teda ohnisko (viď Veta 6 a 7).

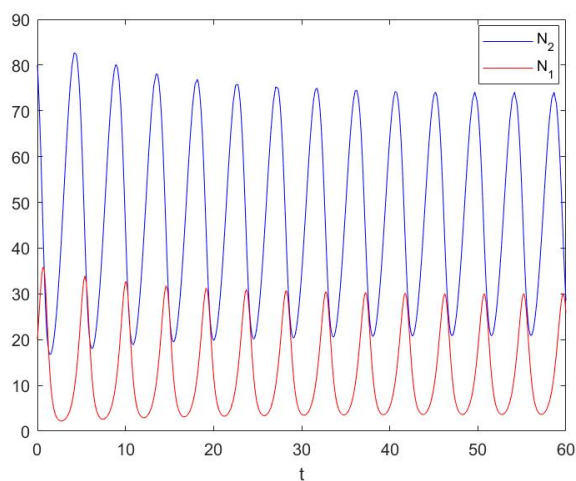
Trajektóriou systému (5.5) je limitný cyklus (viď [3]). To znamená, že po uplynutí istého prechodného obdobia sa veľkosti populácií dravca a koristi opakujú, pričom veľkosť populácie koristi (resp. dravca) kolísava okolo hodnoty $N_1 = 42$ (resp. $N_2 = 13,65$).

Trajektória sústavy (5.5) pre počiatočnú veľkosť populácie koristi $N_1 = 80$ a dravca $N_2 = 20$ je na obrázku 5.13.



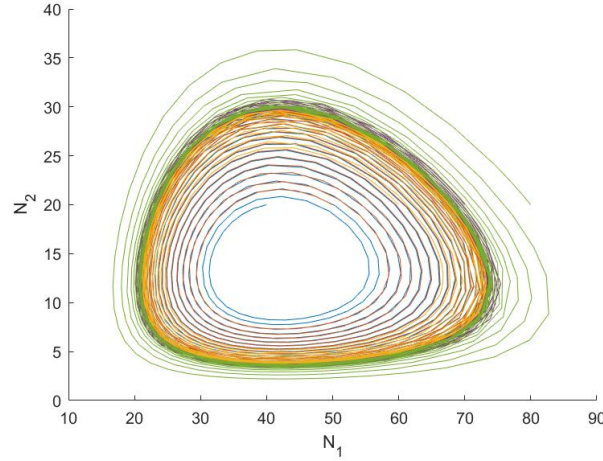
Obr. 5.13: Trajektória systému (5.5) pre $N_1 = 80$ $N_2 = 20$

Veľkosti jednotlivých populácií v čase t vidíme na obrázku 5.14.



Obr. 5.14: Veľkosti jednotlivých populácií v čase t

Trajektórie systému (5.5) pre počiatočnú veľkosť populácie dravca $N_2 = 20$ a rôzne počiatočné veľkosti populácie koristi $N_1 = 40$, $N_1 = 50$, $N_1 = 60$, $N_1 = 70$, $N_1 = 80$ sú zobrazené na obrázku 5.15.



Obr. 5.15: Trajektórie systému (5.5) pre $N_2 = 20$, $N_1 = 40$ až $N_1 = 80$

5.3.2 S trofickou funkciou typu III.

Ak $D > 0$

Uvažujme nasledovné hodnoty konštánt: $\varepsilon_1 = 0,7$; $\alpha = 0,007$; $\varepsilon_2 = 3,26$; $\kappa = 0,23$; $S = 15$; $k = 2$; $a = 0,002$. Sústava rovníc (4.10) bude vyzerat nasledovne

$$\begin{aligned} N_1' &= (0,7 - 0,007N_1)N_1 - 15 \frac{0,002N_1^2}{0,002N_1^2 + 1} N_2, \\ N_2' &= -3,26N_2 + 3,45 \frac{0,002N_1^2}{0,002N_1^2 + 1} N_2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Singulárne body systému (5.6) sú $[0, 0]$, $[100, 0]$ a $[92,62; 0,336]$. Vlastné čísla matice $J = [0, 0]$ sú $\lambda_1 = 0,7$ a $\lambda_2 = -3,26$, bod $[0, 0]$ je teda podľa Vety 6 a 7 sedlo. Vlastné čísla matice $J(100, 0)$ sú $\lambda_1 = -0,7$ a $\lambda_2 = 0,0257$, takže singulárny bod $[100, 0]$ je podľa Vety 6 a 7 tiež sedlo. Vlastné čísla matice $J(92,62; 0,336)$ sú

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{D}}{2},$$

kde

$$\delta = 2\alpha N_1^* - \varepsilon_1 + V'(N_1^*)N_2^* = 0,602$$

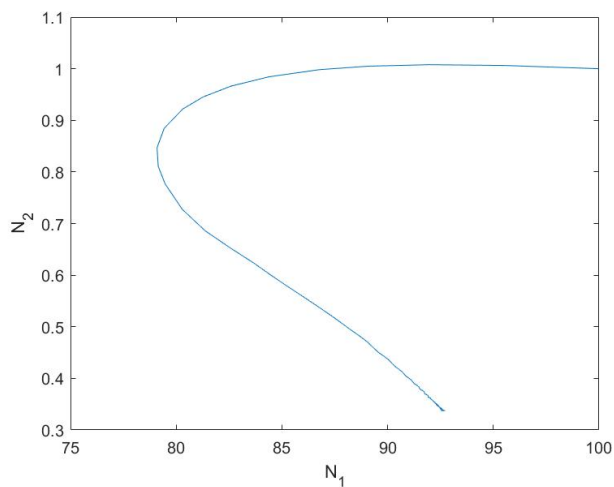
a

$$D = \delta^2 - 4\kappa N_2^* S^2 \frac{a^2 k N_1^{*2k-1}}{(aN_1^{*k} + 1)^3} = 0,289 > 0.$$

Singulárny bod $[92,62; 0,336]$ je teda podľa Vety 6 a 7 uzol.

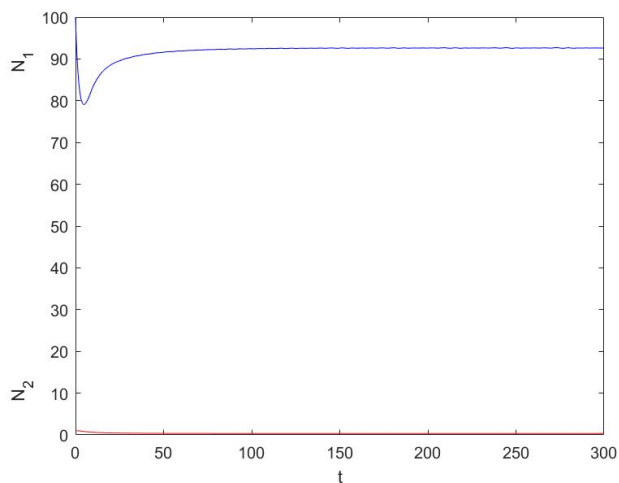
Veľkosť populácie koristi sa ustáli na hodnote $N_1 = 92,62$ a veľkosť populácie dravca na hodnote $N_2 = 0,336$.

Trajektória systému (5.6) pre počiatočnú veľkosť populácie koristi $N_1 = 100$ a dravca $N_2 = 1$ je na obrázku 5.16.



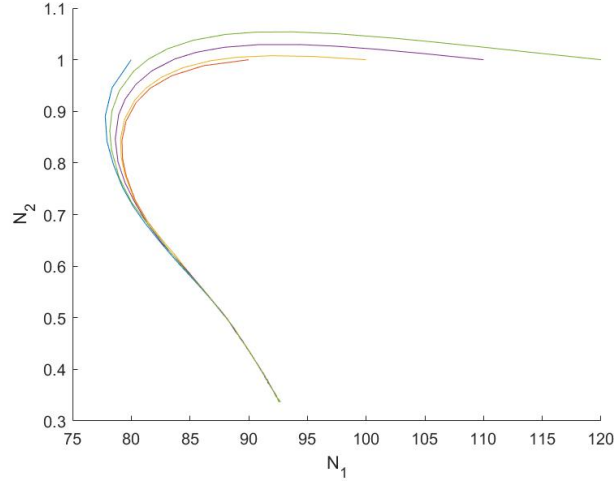
Obr. 5.16: Trajektórie systému (5.6) pre $N_1 = 100$, $N_2 = 1$

Veľkosti jednotlivých populácií v čase t môžeme vidieť na obrázku 5.17



Obr. 5.17: Veľkosti jednotlivých populácií v čase t

Trajektórie systému (5.6) pre počiatočnú veľkosť populácie dravca $N_2 = 1$ a rôzne počiatočné veľkosti populácie koristi $N_1 = 80$, $N_1 = 90$, $N_1 = 100$, $N_1 = 110$, $N_1 = 120$ sú na obrázku 5.18.



Obr. 5.18: Trajektórie systému (5.6) pre $N_2 = 1$ a $N_1 = 80$ až $N_1 = 120$

Ak $D < 0$

Uvažujme nasledovné hodnoty konštánt: $\varepsilon_1 = 0,7$; $\alpha = 0,007$; $\varepsilon_2 = 1,8$; $\kappa = 0,4$; $S = 10$; $k = 2$; $a = 0,001$. Sústava rovníc (4.10) bude vyzeráť nasledovne

$$\begin{aligned} N_1' &= (0,7 - 0,007N_1)N_1 - 10 \frac{0,001N_1^2}{0,001N_1^2 + 1} N_2, \\ N_2' &= -1,8N_2 + 4 \frac{0,001N_1^2}{0,001N_1^2 + 1} N_2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Singulárne body systému (5.7) sú $[0, 0]$, $[100, 0]$ a $[28,6; 3,176]$. Vlastné čísla matice $J = [0, 0]$ sú $\lambda_1 = 0,7$ a $\lambda_2 = -1,8$, bod $[0, 0]$ je teda podľa Vety 6 a 7 sedlo. Vlastné čísla matice $J(100, 0)$ sú $\lambda_1 = -0,7$ a $\lambda_2 = 1,836$, takže signálny bod $[100, 0]$ je podľa Vety 6 a 7 tiež sedlo. Vlastné čísla matice $J(28,6; 3,176)$ sú

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{D}}{2},$$

kde

$$\delta = 2\alpha N_1^* - \varepsilon_1 + V'(N_1^*)N_2^* = 0,25$$

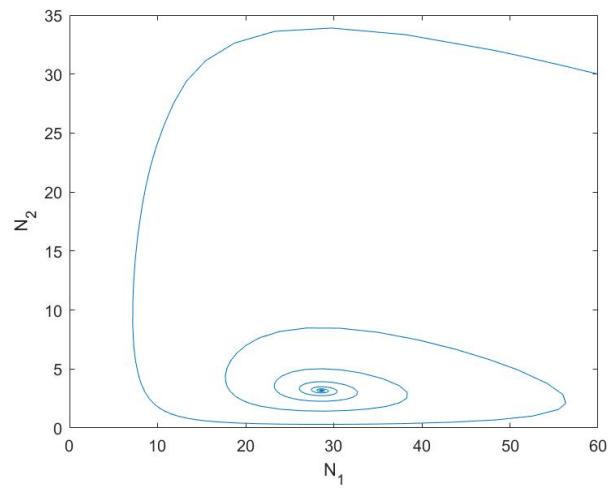
a

$$D = \delta^2 - 4\kappa N_2^* S^2 \frac{a^2 k N_1^{*2k-1}}{(aN_1^{*k} + 1)^3} = -3,895 < 0.$$

Singulárny bod $[28,6; 3,176]$ je teda podľa Vety 6 a 7 ohnisko.

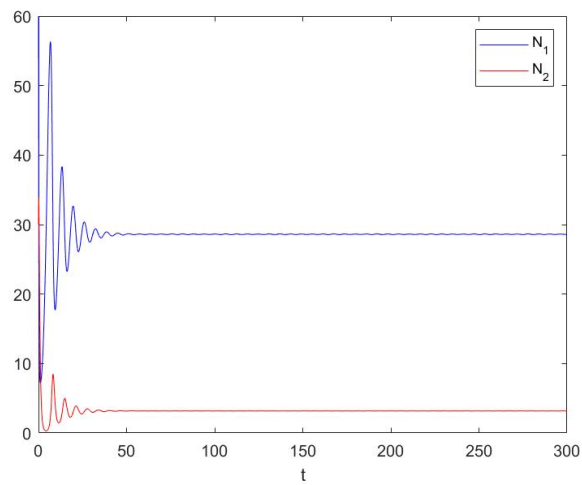
Veľkosť populácie koristi sa ustáli na hodnote $N_1 = 28,6$ a veľkosť populácie dravca na hodnote $N_2 = 3,176$.

Trajektória systému (5.7) pre počiatočnú veľkosť populácie koristi $N_1 = 60$ a dravca $N_2 = 30$ je na obrázku 5.19.



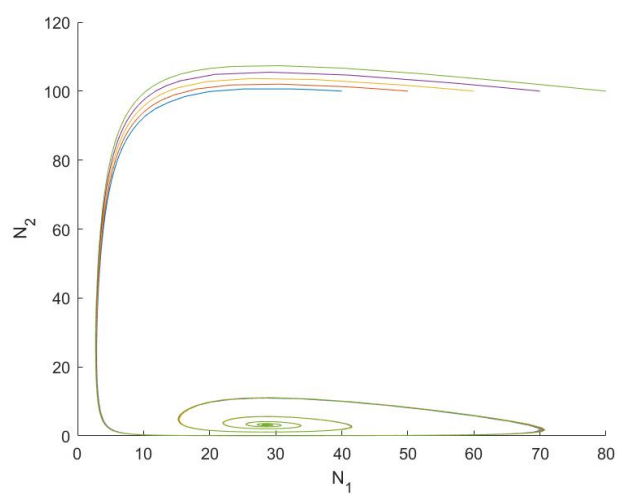
Obr. 5.19: Trajektórie systému (5.7) pre $N_1 = 60$, $N_2 = 30$

Veľkosti jednotlivých populácií v čase t môžeme vidieť na obrázku 5.20



Obr. 5.20: Veľkosti jednotlivých populácií v čase t

Trajektórie systému (5.7) pre počiatočnú veľkosť populácie dravca $N_2 = 100$ a rôzne počiatočné veľkosti populácie koristi $N_1 = 40, N_1 = 50, N_1 = 60, N_1 = 70, N_1 = 80$ sú na obrázku 5.21



Obr. 5.21: Trajektórie systému (5.7) pre $N_2 = 100$ a $N_1 = 40$ až $N_1 = 80$

Záver

Cieľom tejto práce bolo zostaviť a analyzovať niektoré modely z matematickej biológie a následne ukázať ich použitie v praxi. Konkrétne sme sa zaujímali o modely popisujúce vzťah dravec - korisť.

Najskôr sme si na základe istých predpokladov zostavili klasický model Lotka - Volterra, ktorý je vyjadrený systémom dvoch nelineárnych diferenciálnych rovníc. Zistili sme, že trajektórie tohto systému sú uzavreté krivky, ktoré vo svojom vnútri nutne obsahujú singulárny bod $[\varepsilon_2/\gamma_2, \varepsilon_1/\gamma_1]$. Veľkosti populácií dravcov a koristi sa teda podľa tohto modelu periodicky opakujú, pričom kolísajú okolo rovnovážnych stavov. Prišli sme však k záveru, že tento model má viacero nedostatkov. Uvažovali sme v ňom napríklad neobmedzený zdroj potravy koristi a z toho vyplývajúci nekonečný rast populácie koristi bez prítomnosti dravca, čo v skutočnosti nie je možné. Ďalším nedostatkom bola tiež veľká citlivosť na poruchy.

V ďalšej časti tejto práce sme sa pokúsili odstrániť spomínané nedostatky prvého modelu tým, že sme Malthusov model rastu populácie v klasickom modeli Lotka - Volterra nahradili Verhulstovým logistickým modelom rastu populácie. Tým sme teda začali brať do úvahy aj vnútrodruhovú konkurenciu v populácii koristi. Zistili sme, že môžu nastať dve situácie: buď populácia dravca vymrie a veľkosť populácie koristi sa ustáli na hodnote ε_1/α , alebo sa veľkosť populácie ustáli na hodnote N_1^* a veľkosť dravca na hodnote N_2^* .

Posledným modelom, ktorý sme si zostavili, bol model Gauseho typu. Množstvo ulovenej koristi nám vyjadrovala trofická funkcia $V(N_1)$. Rozobrali sme si Gauseho modely s rôznymi trofickými funkciami, konkrétne s trofickou funkciou typu II. a trofickou funkciou typu III. (viď obrázok 4.1). Zistili sme, že trajektóriou systému s trofickou funkciou typu II. je limitný cyklus. To znamená, že sa veľkosti populácií dravca a koristi začnú po uplynutí istého prechodného obdobia periodicky opakovať, pričom stavy koristi aj dravca budú kolísať okolo určitých stredných hodnôt. Naopak, v systéme s trofickou funkciou typu III. sa veľkosti jednotlivých populácií periodicky opakovať nebudú, ale ustália sa na hodnotách N_1^* a N_2^* .

Smerové polia a trajektórie jednotlivých modelov sme si vykreslili pomocou programu **pplane**.

Na záver sme si zvolili konkrétne hodnoty koeficientov a trajektórie všetkých spomínaných modelov sme si pomocou softwaru Matlab vykreslili.

Literatúra

- [1] BRAUER, Fred a Carlos CASTILLO - CHAVEZ. *Mathematical models in population biology and epidemiology*. 2nd ed. New York: Springer, c2012. Texts in applied mathematics. ISBN 978-1-4614-1686-9.
- [2] MURRAY, J. D. *Mathematical biology*. 3rd ed. New York: Springer, 2003. ISBN 03-879-5223-3.
- [3] KALAS, Josef a Zdeněk POSPÍŠIL. *Spojité modely v biologii*. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2626-X.
- [4] KALAS, Josef a Miloš RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Vyd. 2. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2589-1.
- [5] FRANCŮ, Jan. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 2012.
- [6] Řešení odezev dynamických systémů ve fázové rovině. In: *Http://www.umt-old.fme.vutbr.cz [online]*. [cit. 2018-05-11]. Dostupné z: *http : //www.umt – old.fme.vutbr.cz/ pkrejci/opory/SimDSoust/kapitola4.html*